Correction OS – TP 8

Régime transitoire d'un circuit linéaire du second ordre

Le corrigé est donné sans schéma et sans que soient systématiquement développées toutes les explications ou justifications utiles. Celles-ci sont néanmoins exigibles.

I - Étude théorique du régime transitoire du circuit RLC soumis à un créneau de tension

I.1 - Étude générale

1. À démontrer :

$$\boxed{\forall t,\ LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = e(t)}$$

Or, la forme canonique de l'équation d'un oscillateur amorti est

$$\boxed{\forall t,\ \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u(t) = \omega_0^2 e(t)}$$

On en déduit $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \omega_0\frac{L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$.

2. Équation caractéristique associée à l'équation homogène :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

Discriminant : $\Delta = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$
Le régime critique est obtenu pour $\Delta = 0$ d'où $Q = \frac{1}{2}$ et

$$\boxed{R_{critique} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Le régime <u>pseudo-périodique</u> est obtenu pour $\Delta < 0$ donc pour $\boxed{R < R_{critique}}$ (et $Q > \frac{1}{2}$).

Le régime <u>apériodique</u> est obtenu pour $\Delta > 0$ donc pour $\boxed{R > R_{critique}}$ (et $Q < \frac{1}{2}$).

I.2 - Régime transitoire pseudo-périodique

1. À justifier :

$$\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0} \quad ; \quad \omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}}$$

2. À justifier :
   — Premier critère : on sait qu'on peut voir approximativment Q oscillations pendant le régime transitoire (voir TD), il faut donc $\frac{T_C}{2} > QT$ et donc $\boxed{T_C > 2QT}$

— Second critère : la fin du régime transitoire est atteint quand on atteint 99 % de la valeur finale d'où $\boxed{T_C > 2\tau \ln(100) = \dfrac{4Q\ln(100)}{\omega_0}}$ $\boxed{f_C < \dfrac{\omega_0}{4Q\ln(100)}}$

Remarque : on peut montrer que le second critère est plus restrictif que le premier dès que $Q > 0,64$.

3. À démontrer :

$$\boxed{\delta = \frac{T}{\tau} = \frac{\omega_0 T}{2Q} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}}$$

I.3 - Régime transitoire apériodique

1. À justifier :

$$\boxed{\tau_1 = \frac{2Q}{\omega_0}\frac{1}{1-\sqrt{1-4Q^2}}} \quad \boxed{\tau_2 = \frac{2Q}{\omega_0}\frac{1}{1+\sqrt{1-4Q^2}}}$$

Remarque : on a bien $1-\sqrt{1-4Q^2} < 1+\sqrt{1-4Q^2}$ et donc $\tau_1 > \tau_2$.

2. À démontrer :

$$\boxed{\forall t \in [0;\frac{T_C}{2}],\ u(t) = \frac{2E}{\tau_1-\tau_2}\left(-\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right) + E}$$

3. À justifier :

$$\boxed{\forall t \in]0;\frac{T_C}{2}[,\ u(t) \approx -2Ee^{-\frac{t}{\tau_1}} + E}$$

4. À démontrer :

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+} \approx \frac{2E}{\tau_1}}$$