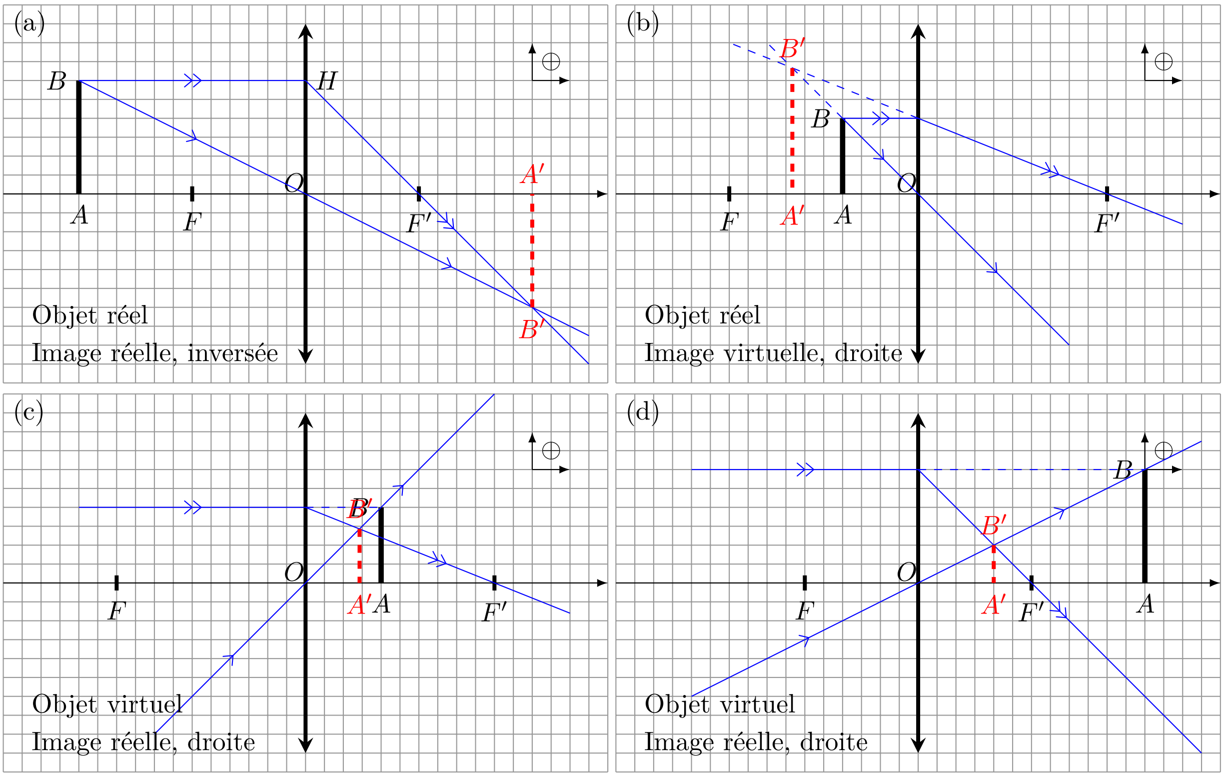
Correction OS – TP 4

Lentilles convergentes

I - Préparation

I.1 - Constructions géométriques

1. 

   (e) Objet réel éloigné : (a) ; Objet réel proche : (b)

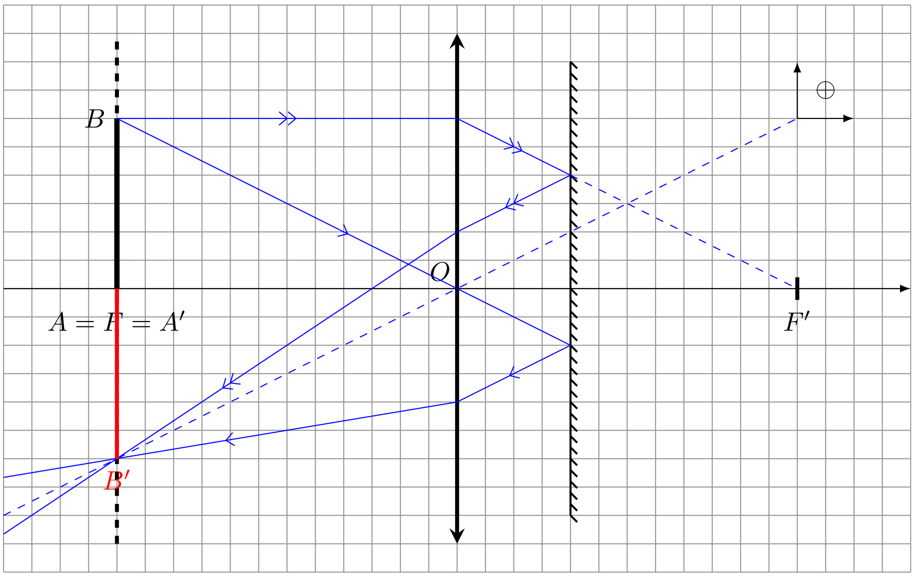
2. On veut $\gamma = -1$, l'image doit donc être inversée, on est donc dans la situation du schéma (a). Sur ce schéma, si on note H le point d'intersection entre la lentille, le rayon incident parallèle à l'axe optique et le rayon émergeant passant par F', on a évidemment $AB = OH$. Par ailleurs, les triangles (OHF') et $A'B'F'$ sont semblables, on peut donc écrire $\frac{OH}{OF'} = \frac{A'B'}{F'A'}$ soit $F'A' = \frac{A'B'}{AB} OF'$. La condition $|\gamma| = 1$ amène alors à $F'A' = OF' = f'$ ou encore $OA' = 2f'$. On peut mener un raisonnement analogue entre les triangles (OAB) et $(OA'B')$ qui sont également semblable et obtenir alors $OA = 2f'$. L'objet et l'image étant réels, on a finalement $\boxed{\overline{OA} = -2f'}$ et $\boxed{\overline{OA'} = 2f'}$.

3. On déplace la lentille et l'écran jusqu'à avoir une image nette, inversée et de même taille. On mesure alors la distance D entre l'objet et l'écran. La focale de la lentille est alors $\boxed{f' = \dfrac{D}{4}}$.

I.2 - Formules de conjugaison

1. Voir cours.
2. La relation de grandissement de Descartes donne, pour $\gamma = -1$, $\overline{OA'} = -\overline{OA}$. En reportant ce résultat dans la formule de position, on trouve $\frac{1}{-\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$ et donc $\boxed{\overline{OA} = -2f'}$.

I.3 - Focométrie par autocollimation

1. 

2. On peut modéliser le parcours suivi par la lumière par le diagramme suivant :

$$AB \xrightarrow{\text{lentille}} A_1B_1 \xrightarrow{\text{miroir}} A_2B_2 \xrightarrow{\text{lentille}} A'B'$$

   L'objet AB étant sur le plan focal objet de la lentille, son image A_1B_1 est à l'infini. L'image d'un objet à travers un miroir plan étant le symétrique par rapport au miroir, A_2B_2 est également à l'infini et ceci, quelle que soit la position du miroir. Enfin, A_2B_2 étant à l'infini, son image est située sur le plan focal image de la lentille « retournée », soit sur le même plan que AB.

3. À partir d'un objet AB, on déplace la lentille jusqu'à voir nette son image à travers le système {lentille+miroir} sur le même plan que l'objet. On mesure alors la distance objet–lentille, elle est alors égale à la focale f'.

I.4 - Méthode de Bessel

1. On a $p = \overline{OA}$ et $p' = \overline{OA'} = \overline{OA} + \overline{AA'} = p + D$. La formule de conjugaison de Descartes s'écrit alors $\frac{1}{p+D} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$ ce qui peut se réécrire en

$$\boxed{p^2 + Dp + Df' = 0}$$

2. Le discriminant de l'équation précédente est $\Delta = D^2 - 4Df'$. Il y a donc deux solutions si $\Delta > 0$, soit $\boxed{D > 4f'}$. On a alors $p_{1,2} = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4Df'}}{2}$.

3. Pour $\Delta = 0$, soit $D = 4f'$, on a une solution unique $p_0 = -\frac{D}{2} = -2f'$. On retrouve bien le résultat obtenu précédemment pour la méthode de Silbermann.

4. On a $d = |p_2 - p_1|$. D'après les expressions obtenues précédemment pour p_1 et p_2, on en déduit $d = \sqrt{D^2 - 4Df'}$ soit $d^2 = D^2 - 4Df'$. On trouve alors

$$\boxed{f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}}$$

II - Focométrie des lentilles minces

Pour la suite, on supposera que la lentille manipulée avait une vergence de $V = 5\,\delta$, soit une focale $f' = 20\,\text{cm}$. Les résultats des opérations de mesurage sont bien sûr arbitraires et à remplacer par les valeurs réellement obtenues pendant le TP.

II.1 - Méthode d'autocollimation

1. On effectue 5 mesures de f' par la méthode d'autocollimation : on fixe la lanterne sur le banc optique, on accole une feuille de papier faisant office d'écran au niveau de la lettre et on note sa position x_0. Puis on déplace l'ensemble {lentille+miroir} jusqu'à voir nette sur la feuille la lettre renversée. On note alors la position de la lentille x_i sur le banc. On a alors $f'_i = x_i - x_0$.
   On obtient le tableau suivant :

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
(cm)	40,0	58,7	59,4	61,7	59,9	60,2
f' (cm)		18,9	19,4	21,7	19,9	20,2

   On retient donc $\bar{f}' = \frac{21{,}7+18{,}9}{2} = 20{,}3\,\text{cm}$ et $e = 21,7 - 18,9 = 2{,}8\,\text{cm}$.
2. (a) Le banc optique est gradué en millimètres, on en déduit $u_{f',lec} = \frac{1\,\text{mm}}{\sqrt{6}} = 0{,}41\,\text{mm}$.
   (b) On a directement $u_{f',map} = \frac{e}{2\sqrt{3}} = \frac{28\,\text{mm}}{2\sqrt{3}} = 8{,}08\,\text{mm}$.
   (c) Finalement $u^2_{f'} = u^2_{f',lec} + u^2_{f',map} = 65{,}45\,\text{mm}^2$, soit $u_{f'} = 8{,}09\,\text{mm}$.
3. Par la méthode d'autocollimation trouve $\boxed{f'_a = (20,30\ ;\ 0,81)\ \text{cm}}$

II.2 - Méthode de Bessel

1. Il faut $D > 4f'$ soit, d'après la valeur obtenue par autocollimation, $D > 81{,}2\,\text{cm}$.
   On fait 5 séries de mesures, pour des valeurs différentes de D. On mesure à chaque fois, les deux positions de la lentille p_1 et p_2 sur l'axe optique permettant de voir une image nette de l'objet sur l'écran (en fixant le zéro du banc sur la position de l'objet). On calcule alors $d = |p_2 - p_1|$ puis $f' = \frac{D^2-d^2}{4D}$.
   On obtient le tableau suivant, où toutes les longueurs sont exprimées en cm :

D	p_1	p_2	d	f'
90	30.2	59,4	29,2	20,13
100	27,9	72,4	44,5	20,05
120	25,5	94,0	68,5	20,22
140	24,5	117,2	92,7	19,65
150	23,8	125,2	101,4	20,36

2. On trouve $\bar{f}' = 20{,}0847\,\text{cm}$, $u_{f'_i} = 0{,}267\,\text{cm}$ et donc $u_{\bar{f}'} = \frac{u_{f'_i}}{\sqrt{5}} = 0{,}119\,\text{cm}$.
3. Par la méthode d'autocollimation trouve $\boxed{f'_B = (20,08\ ;\ 0,12)\ \text{cm}}$.
   Pour vérifier la compatibilité des deux mesures (autocollimation et Bessel), on calcule le Z-score :
$$Z = \frac{|f'_a - f'_B|}{\sqrt{u^2(f'_a) + u^2(f'_B)}} = \frac{|20,30 - 20,08|}{\sqrt{0,81^2 + 0,12^2}} = \frac{0,22}{0,82} = 0,27$$
   $Z < 2$, les deux mesures sont donc compatibles.

II.3 - Estimation graphique manuelle

1. On complète le tableau précédent en ajoutant une ligne $D^2 - d^2$:

D (cm)	90	100	120	140	150
$D^2 - d^2$ (cm^2)	7247	8019	9708	11007	12218

On trace la courbe $D^2 - d^2 = f(D)$ et on cherche la droite de régression linéaire. À l'aide de la fonction `DROITEREG` d'un tableur[1] on trouve l'équation de cette droite :

$$D^2 - d^2 = k\,D$$

avec $k = 80{,}33\,\text{cm}$ et $u(k) = 0{,}552\,\text{cm}$. D'après les résultats précédents, on sait $k = 4f'$, on en déduit une nouvelle estimation de la focale $f' = 20{,}083\,\text{cm}$ et $u(f') = 0{,}137\,\text{cm}$.

L'analyse par régression linéaire de la méthode de Bessel donne alors $\boxed{f'_{Brg} = (20,08\ ;\ 0,14)\ \text{cm}}$

Pour vérifier la compatibilité du modèle avec les mesures, il faut superposer les graphiques précédents, en y ajoutant des barres d'erreur sur les valeurs mesurées. Comme pour la méthode d'autocollimation, on va considérer que l'incertitude sur une mesure est constituée d'une incertitude-type de lecture u_{lec} et d'une incertitude-type de mise au point u_{map}

(a) On peut, pour simplifier, considérer que la précision de lecture sur le banc est la même pour toutes les mesures, soit 1 graduation ou 1 mm. L'incertitude associée est alors $u_{lec} = \frac{1\,\text{mm}}{\sqrt{3}} = 0{,}577\,\text{mm}$. Que ce soit pour D ou d, on effectue 2 mesures à chaque fois : position de la lanterne et de l'écran pour D et p_1 et p_2 pour d. On a donc au final $u_{D,lec} = u_{d,lec} = \sqrt{2}\,u_{lec} = 0{,}816\,\text{mm}$.

(b) On rajoute une incertitude de mise au point, qui ne sera appliquée que sur les mesurages de p_1 et p_2. Cette incertitude est liée au fait qu'il est difficile d'évaluer précisément la netteté de l'image sur l'écran. En reprenant les valeurs extrêmes des positions de la lentille en gardant une image nette, on peut estimer que la précision est de 3 mm. On a alors $u_{p,map} = \frac{3\,\text{mm}}{\sqrt{3}} = 1{,}732\,\text{mm}$ et donc $u_{d,map} = \sqrt{2}\,u_{map} = 2{,}449\,\text{mm}$.

(c) En regroupant ces deux causes d'incertitudes, on trouve

$$u(D) = u_{D,lec} = 0{,}816\,\text{mm}$$

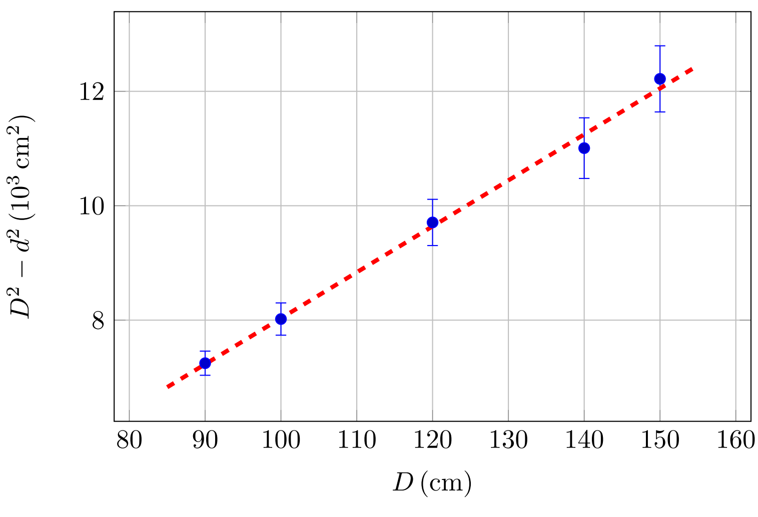
$$u(d) = \sqrt{u_{d,lec}^2 + u_{d,map}^2} = 2{,}582\,\text{mm}$$

(d) On fait maintenant un calcul de propagation des incertitudes pour obtenir l'incertitude sur $D^2 - d^2$: $u(D^2) = 2u(D)D$ et $u(d^2) = 2u(d)d$. Et donc $u(D^2 - d^2) = \sqrt{(2u(D)D)^2 + (2u(d)d)^2}$.

D (cm)	90	100	120	140	150
$D^2 - d^2 (\text{cm}^2)$	7247	8019	9708	11007	12218
$u(D^2 - d^2)$ (mm)	211	282	404	530	578

On peut maintenant rajouter des barres d'erreur de$\pm 2\,u(D^2 - d^2)$ sur le graphe :

Estimation de f' par la méthode de Bessel



La droite de régression passant par toutes les barres d'incertitudes expérimentales, on peut conclure que le modèle est bien validé et que l'estimation de f' obtenue d'après celui-ci est recevable.

1. La relation étant ici linéaire, il faut paramétrer `DROITEREG` pour qu'il suppose l'ordonnée à l'origine nulle. Se reporter à l'aide du logiciel et aux documents de cours et de TD de Compétences transverses accessibles sur le site `http://physique.ptsi-dorian.net` pour les explications.