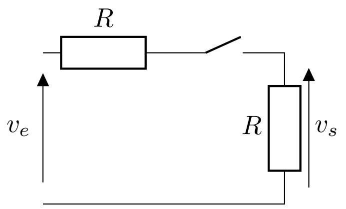
Correction OS – TP 10

Filtrage linéaire
Tracé d'un diagramme de Bode

I - Étude théorique d'un filtre

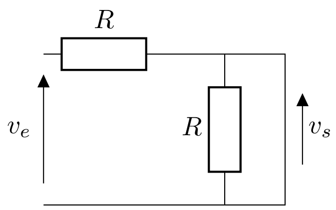
1. Les schémas équivalents en basse et haute fréquence sont donnés ci dessous :

basse fréquence



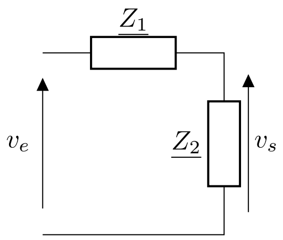
Le circuit étant ouvert, on en déduit immédiatement $v_s \approx 0$.
On en déduit que le filtre proposé est un filtre passe-bande.

haute fréquence



On a immédiatement $v_s \approx 0$.

2. Un circuit équivalent est donné ci-dessous :



avec

$$\underline{Z_1} = \underline{Z}(R\,s\,C) = \underline{Z_R} + \underline{Z_C} = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1+jRC\omega}{jC\omega}$$

$$\underline{Z_2} = \underline{Z}(R\,//\,C) = \frac{\underline{Z_R} \times \underline{Z_C}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_C}} = \frac{\frac{R}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R}{1+jRC\omega}$$

On peut alors appliquer la relation du pont diviseur de tension qui donne

$$\underline{v_s} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}} \underline{v_e} = \frac{\frac{R}{1+jRC\omega}}{\frac{1+jRC\omega}{jC\omega} + \frac{R}{1+jRC\omega}} \underline{v_e} = \frac{jRC\omega}{(1+jRC\omega)^2 + jRC\omega} \underline{v_e}$$

soit

$$\boxed{\underline{v_s} = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2} \underline{v_e}}$$

3. En divisant l'expression précédente par $3jRC\omega$ au numérateur et au dénominateur, on trouve l'expression demandée pour $\underline{H}$:

$$\underline{H} = \frac{A}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega}\right)} \quad \text{avec} \quad \boxed{A = \frac{1}{3}\,;\ \omega_1 = \frac{3}{RC}\,;\ \omega_2 = \frac{1}{3RC}}$$

Remarque : cela n'est pas demandé dans l'énoncé, mais on aurait aussi pu identifier avec la forme canonique du cours

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

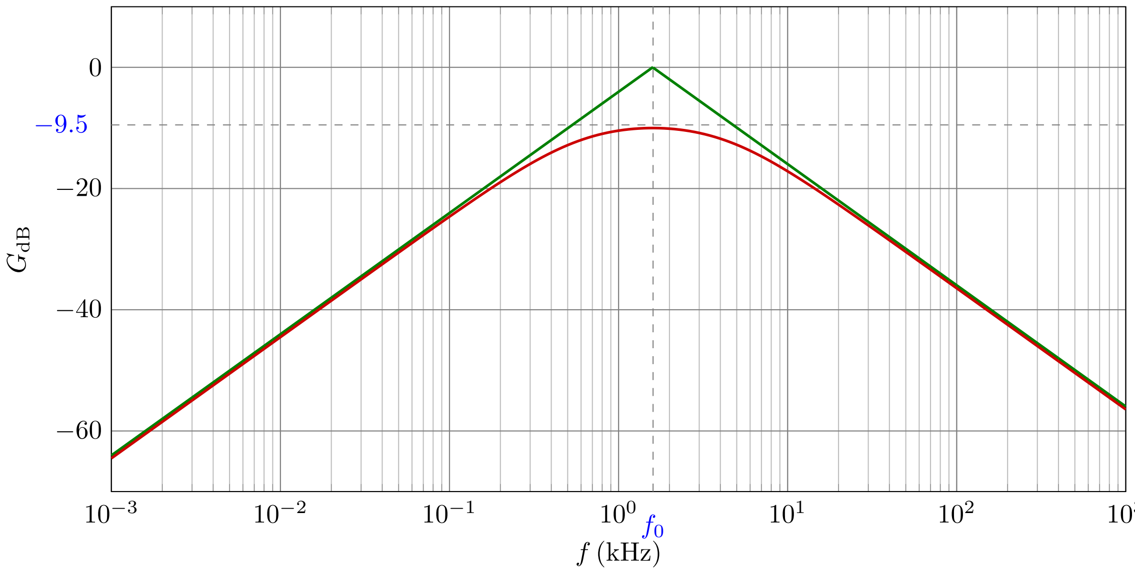
grâce à : $A = \frac{1}{3}$; $Q = \frac{1}{3}$; $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et donc $\omega_0 = \frac{\omega_1}{3} = 3\omega_2$.

4. A.N. :
   — $A = 0,33$;
   — $\omega_1 = 3{,}0 \cdot 10^4\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$; $\omega_2 = 3{,}3 \cdot 10^3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$;
   — $f_1 = 4{,}8 \cdot 10^3\,\mathrm{Hz}$; $f_2 = 5{,}3 \cdot 10^2\,\mathrm{Hz}$.

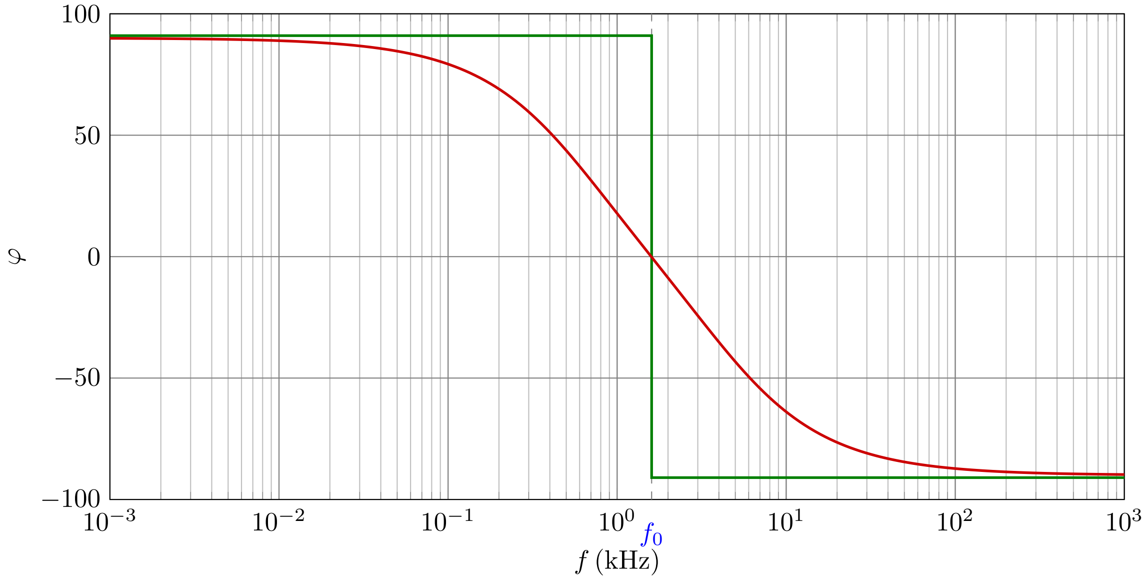
   Remarques : on a aussi $Q = 0{,}33$ et $f_0 = 1{,}6\,\mathrm{kHz}$.

5. — Pour $\omega \ll \omega_2$, on a $\underline{H} \approx \dfrac{A}{-j\frac{\omega_2}{\omega}} = \dfrac{jA\omega}{\omega_2}$ et $G_{\text{dB}} = 20\log(|\underline{H}|)$ soit $\boxed{Y_2(\omega) = 20\log\left(\dfrac{A\omega}{\omega_2}\right)}$.
   — Pour $\omega \gg \omega_1$, on a $\underline{H} \approx \dfrac{A}{j\frac{\omega}{\omega_1}} = -\dfrac{jA\omega_1}{\omega}$ et $G_{\text{dB}} = 20\log(|\underline{H}|)$ soit $\boxed{Y_1(\omega) = 20\log\left(\dfrac{A\omega_1}{\omega}\right)}$.

   Y_1 a ainsi une pente de -20 dB/décade et Y_2 de +20 dB/décade.
6. Pour $\omega = \omega_0$, on a $Y_1(\omega_0) = Y_2(\omega_0)$ soit
$$20\log(A) - 20\log(\omega_2) + 20\log(\omega_0) = 20\log(A) + 20\log(\omega_1) - 20\log(\omega_0)$$
   et donc $40\log(\omega_0) = 20\log(\omega_1) + 20\log(\omega_2) = 20\log(\omega_1\omega_2)$.
   On en déduit
$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}}$$
   Remarque : on retrouve bien la pulsation propre du filtre ω_0 telle que définie à la question 3.
   On a également $f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$ et donc $\underline{f_0 = 1{,}6\,\text{kHz}}$.
7. $\boxed{Y_{1,\text{dB}}(\omega_0) = Y_{2,\text{dB}}(\omega_0) = 20\log(|A|) - 20\log\left(\sqrt{\dfrac{\omega_2}{\omega_1}}\right)} = 0\,\text{dB}$
8. $\boxed{G_{\text{dB}}(\omega_0) = 20\log(|A|)} = -9{,}5\,\text{dB}$
9. $\boxed{Q = \sqrt{\dfrac{\omega_2}{\omega_1}}} = 0,33$
10. On déduit de l'ensemble des résultats précédents le diagramme de Bode asymptotique en gain (en vert) et l'allure du diagramme de Bode en gain (en rouge) du filtre :



11. On déduit des expressions asymptotiques de $\underline{H}$ obtenues à la question 5
$$\boxed{\lim_{\omega\to 0}\varphi = +\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{\omega\to\infty}\varphi = -\frac{\pi}{2}}$$
   L'expression canonique de $\underline{H}$ obtenue à la question 3 donne, pour $\omega = \omega_0$,
$$\boxed{\varphi(\omega_0) = 0}$$
   On en déduit le diagramme de Bode asymptotique en phase (en vert) et l'allure du diagramme de Bode en phase (en rouge) du filtre :



Remarques utiles permettant une auto-correction :

— Un filtre passe-bande du premier ordre, ça n'existe pas. L'ordre d'un filtre passe-bande est toujours au moins égal à 2.

— Les données de l'énoncé comportant deux chiffres significatifs, les résultats des calculs doivent être donnés avec cette même précision.

— En toute rigueur, il est interdit de mettre une grandeur dimensionnée en argument d'une fonction logarithme (problème d'homogénéité).
Par exemple, on ne décompose donc jamais $20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ en $20\log(\omega) - 20\log(\omega_0)$.

— Pour l'étude de la phase : la partie réelle du dénominateur de la fonction de transfert est 1. Il n'y a donc pas lieu de distinguer deux cas, en arctan() et $\pi+$arctan() puisque cette distinction n'a de sens que quand le signe de la partie réelle peut changer.

— Pour le tracé du diagramme de Bode en amplitude :
  — f_0 est la fréquence centrale ;
  — il faut tracer la courbe et les asymptotes ;
  — $G_{\text{dB}}(\omega_0)$ n'est pas l'ordonnée à laquelle les asymptotes se coupent ; il s'agit du maximum de la courbe ;
  — $Q = |A|$ donc les asymptotes se coupent en ω_0 pour une ordonnée nulle ;
  — $|A| < 1$ donc le maximum de la courbe en ω_0 est négatif ; donc la courbe reste toujours en dessous des asymptotes ;
  — $Q < \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc le diagramme de Bode réel reste en dessous du diagramme de Bode asymptotique ;
  — l'écart entre la courbe et les asymptotes en ω_0 est égal à $20\log(Q) = -9{,}5\,\text{dB}$;