Correction OS – TD 8

Impédances complexes et régimes sinusoïdaux forcés

I - Formalisme complexe

— Pour passer du signal réel $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$ à sa représentation complexe $\underline{s} = \underline{S_0}\, e^{j\omega t}$ avec $\underline{S_0} = S_0\, e^{j\varphi}$.

— Pour passer de la représentation complexe du signal $\underline{s}$ au signal réel : $s(t) = \Re(\underline{s})$.

On a donc :

▷ $\underline{u} = \left(U_0\, e^{j\frac{\pi}{4}}\right) e^{j\omega t}$

▷ $\underline{i} = \left(I\sqrt{2}\, e^{-j\psi}\right) e^{j\omega t}$

▷ $\underline{s} = \left(S_m\, e^{-j\frac{\pi}{2}}\right) e^{j\omega t}$

▷ $u(t) = U_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{3})$

▷ $i_1(t) = \frac{U_0}{R} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{U_0}{R} \sin(\omega t)$

▷ $u(t) = I_m \cos(\omega t - \frac{5\pi}{6})$

II - Association RL série

1. Les deux dipôles sont en série, leurs impédances s'ajoutent. En notant ω la pulsation du régime permanent sinusoïdal forcé : $\boxed{\underline{Z} = R + jL\omega}$

Pour les questions suivantes, on commence par littéraliser le problème. On pose :

— $u(t) = u_m \cos(\omega t + \varphi_u)$, c'est-à-dire $u_m = 230\sqrt{2}$ V ; $\varphi_u = 0$; $\omega = 100\pi$ rad s^{-1} ;

— $i(t) = i_m \cos(\omega t + \varphi_i)$;

— $\underline{u} = \underline{u_m} e^{j\omega t}$ avec $\underline{u_m} = u_m e^{j\varphi_u}$; avec $u(t) = \mathrm{Re}(\underline{u})$.

— $\underline{i} = \underline{i_m} e^{j\omega t}$ avec $\underline{i_m} = i_m e^{j\varphi_i}$; avec $i(t) = \mathrm{Re}(\underline{i})$.

2. On a $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$, on en déduit :

   — $\varphi_u - \varphi_i = \arg(\underline{Z}) = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$;

   — $\frac{u_m}{i_m} = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$.

   Finalement :
$$\boxed{\varphi_i = -\arg(\underline{Z}) = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)\ ;\ i_m = \frac{u_m}{|\underline{Z}|} = \frac{u_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}}$$

   $\varphi_i < \varphi_u$ donc <u>i est en retard sur u</u>, ce qui est le comportement attendu pour un circuit inductif.

3. (a) $R = 1\,\Omega$ et $L\omega > 0$ donc $\sqrt{R^2 + (L\omega)^2} > 1\,\Omega$ donc $i_m = \frac{u_m}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}} < \frac{230\sqrt{2}\ \mathrm{V}}{1\,\Omega} = 325\,\mathrm{A}$. Les seules réponses possibles sont donc $i_m = 125\,\mathrm{A}$ et $i_m = 267\,\mathrm{A}$. On fait l'application numérique pour $|\underline{Z}|$. On trouve : $|\underline{Z}| = \sqrt{(1\,\Omega)^2 + \left(2{,}20 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{H} \times 100 \times 3,14\ \mathrm{rad/s}\right)^2} \approx \sqrt{1,5}\Omega \approx 1{,}2\,\Omega$, ce qui suffit pour conclure que $\boxed{i_m = 267\,\mathrm{A}}$.

   (b) $\varphi_i < 0$ donc $\boxed{\varphi = -0{,}604\,\mathrm{rad}}$ seule valeur possible.

Remarque : les valeurs $230\sqrt{2}$ V pour une amplitude de tension et 100π rad s^{-1} pour une pulsation sont extrêmement courantes, parce qu'elles correspondent aux valeurs standard du secteur électrique, c'est-à-dire une valeur efficace de la tension valant 230 V et une fréquence de 50 Hz.

4. On lit sur le graphique : une période correspond à 4 graduations et le signal en gris clair ($e(t)$) est en avance de une demie graduation sur le signal en gris foncé ($u(t)$). On en déduit $\boxed{\varphi = -\frac{1}{8}2\pi = -\frac{\pi}{4}}$.

5. On a $\frac{L\omega}{R} = -\tan(\varphi) = 1$ et donc $L = \frac{R}{\omega} = \frac{R}{2\pi f}$. A.N. : $L = 7{,}48\,\mathrm{mH}$.

III - Association RLC série

1. Les trois dipôles sont en série, leurs impédances s'ajoutent. En notant ω la pulsation du régime permanent sinusoïdal forcé : $\boxed{\underline{Z} = R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega} = R\left(1 + j\left(\dfrac{L\omega}{R} - \dfrac{1}{RC\omega}\right)\right)}$

Pour les questions suivantes, on commence par littéraliser le problème. La seule difficulté consiste à remarquer que la tension est définie avec une fonction sinus. Il y a deux possibilités pour traiter le problème :

- Réécrire $u(t)$ avec une fonction cosinus : $u(t) = 2,3.10^2\sqrt{2}\,\sin(2\,\pi\,f\,t) = 2,3.10^2\sqrt{2}\,\cos(2\,\pi\,f\,t - \frac{\pi}{2})$, et poser $\varphi_u = -\frac{\pi}{2}$. Ce n'est pas recommandé.
- Travailler avec les sinus, en assumant juste le fait que les grandeurs réelles sont les parties imaginaires des grandeurs complexes. C'est la méthode la plus simple et recommandée car elle permet de mener les calculs exactement comme dans le cours. On pose alors :
  - $u(t) = u_m\,\sin(\omega t + \varphi_u)$, c'est-à-dire $u_m = 230\sqrt{2}$ V ; $\varphi_u = 0$; $\omega = 2\pi f$;
  - $i(t) = i_m\,\sin(\omega t + \varphi_i)$;
  - $\underline{u} = \underline{u_m}e^{j\omega t}$ avec $\underline{u_m} = u_m e^{j\varphi_u}$; avec $u(t) = \mathrm{Im}(\underline{u})$
  - $\underline{i} = \underline{i_m}e^{j\omega t}$ avec $\underline{i_m} = i_m e^{j\varphi_i}$; avec $i(t) = \mathrm{Im}(\underline{i})$

On note $\underline{Z}$ l'impédance équivalente à l'association RLC série. On a : $\underline{Z} = R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}$

2. L'intensité est nulle, et donc son amplitude aussi, dans les deux cas. En effet : pour $\omega \to 0$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Et pour $\omega \to \infty$, c'est la bobine qui a ce comportement.
3. La fréquence de résonance est la fréquence à laquelle l'amplitude de l'intensité est maximale. Or, on a

$$i_m = \frac{u_m}{|\underline{Z}|} = \frac{u_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

L'amplitude est donc maximale quand le dénominateur est minimal, c'est-à-dire pour l'annulation de $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$. Cette annulation se produit pour une pulsation particulière, qu'on note ω_0 et telle que $L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0$ d'où $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\boxed{f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} = 24\,\text{Hz}$. L'amplitude vaut alors $\boxed{i_{m,max} = \dfrac{u_m}{R}} = 325\,\text{A}$.

À la résonance, tout se passe comme si seule la résistance était présente.

4. On a déjà trouvé l'expression de i_m. Il reste à trouver φ_i. On a $\varphi_u - \varphi_i = \arg(\underline{Z}) = \arctan(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R})$. D'où $\varphi_i = -\arctan\left(\frac{L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}}{R}\right)$ puisque $\varphi_u = 0$. Finalement :

$$\boxed{i(t) = \frac{u_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}\sin\left(\omega t - \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)\right)}$$

5. Cf Cours.
6. (a) $u_m = 325\,\text{V}$ et $|\underline{Z}| \geq R = 1{,}0\,\Omega$ donc $i_m \leq 325\,\text{A}$. Donc $\boxed{i_m = 60{,}1\,\text{A}}$.

   (b) On a $\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R\left(1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)\right)$.
   On a $f = 50\,\text{Hz} > f_0$ donc $\omega > \omega_0$.
   Pour $\omega = \omega_0$, les effets de la bobine et du condensateur se compensent car $L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0$ (cf 2.).
   Pour $\omega > \omega_0$, c'est l'effet de la bobine qui prédomine sur celui du condensateur : le comportement attendu est donc un comportement inductif, c'est-à-dire l'intensité en retard sur la tension, donc $\varphi_u - \varphi_i > 0$ et donc $\varphi_i < 0$ puisque $\varphi_u = 0$. On élimine les valeurs proposées positives ou nulle. On sait aussi que $\forall \omega$, $\arctan(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}) \in]-\frac{\pi}{2}\,;-\frac{\pi}{2}[$, donc on élimine la valeur $-1{,}93\,\text{rad} < -\frac{\pi}{2}$.
   Finalement, $\boxed{\varphi_i = -1{,}39\,\text{rad}}$.
7. (a) Pour les mêmes raisons qu'au 5.(a), $\boxed{i_m = 207\,\text{A}}$.

(b) On a $f = 20\,\text{Hz} < f_0$ donc $\omega < \omega_0$. Pour $\omega < \omega_0$, c'est l'effet du condensateur qui prédomine sur celui de la bobine : le comportement attendu est donc un comportement capacitif, c'est-à-dire l'intensité en avance sur la tension, donc $\varphi_u - \varphi_i < 0$ et donc $\varphi_i > 0$ puisque $\varphi_u = 0$. On élimine les valeurs proposées négatives ou nulle. On sait aussi que $\forall\omega$, $\arctan(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}) \in]-\frac{\pi}{2}\,;-\frac{\pi}{2}[$, donc on élimine la valeur $1{,}85\,\text{rad} > \frac{\pi}{2}$. Finalement, $\boxed{\varphi_i = 0{,}882\,\text{rad}}$.

Remarques :

— Une façon élégante de mener les discussions des 5. et 6. est de d'abord mettre $\underline{Z}$ sous forme canonique :

$$\underline{Z} = R\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

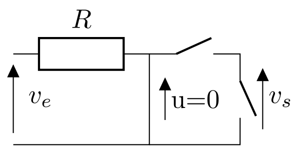
— On observe que l'amplitude et la phase sont très dépendantes de la fréquence : c'est un comportement de filtre ; il suffit de désigner comme entrée la tension $u(t)$ et comme sortie la tension $Ri(t)$ pour pouvoir définir la fonction de transfert qui, compte tenu des allures des courbes trouvées au 4., est un filtre passe-bande. On peut ainsi vérifier que

$$\underline{H} = \frac{R\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{R}{\underline{Z}} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

IV - Étude complète d'un filtre

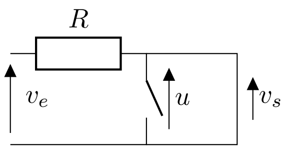
1. Comportements asymptotiques à basse ($\omega \to 0$) et haute ($\omega \to +\infty$) fréquence :

Circuit équivalent à basse fréquence



$u = 0$ car la bobine est équivalente à un fil.
Or v_s est une fonction linéaire de u.
On a donc en basse fréquence $\boxed{v_s \approx 0}$.

Circuit équivalent à haute fréquence



Les condensateurs sont équivalents à des fils.
On a donc en haute fréquence $\boxed{v_s \approx 0}$.

Le filtre est donc probablement un filtre passe-bande.

2. — En raison de la présence de la bobine, la résistance et les condensateurs ne sont pas en série.
   — En raison de la présence d'un condensateur entre u et v_s, le second condensateur n'est pas en parallèle avec la bobine.

   Le circuit n'est donc ni en série, ni en parallèle et il n'existe pas d'impédance équivalente permettant de s'y ramener, tout en gardant v_s. Il n'y a donc pas de pont entre v_s et v_e.

3. ☐ Pont diviseur entre v_s et u : on remarque que les 2 condensateurs sont en série, on peut donc écrire

$$\underline{v_s} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_C}}\underline{u} = \frac{1}{2}\underline{u} \tag{1.1}$$

☐ Pont diviseur entre u et v_e : R et $(\underline{Z_L} /\!/ 2\underline{Z_C})$ sont en série. On a donc : $\underline{u} = \dfrac{(\underline{Z_L} /\!/ 2\underline{Z_C})}{R + (\underline{Z_L} /\!/ 2\underline{Z_C})}\underline{v_s}$

avec $\underline{Z_L} /\!/ 2\underline{Z_C} = \dfrac{jL\omega \times \frac{2}{jC\omega}}{jL\omega + \frac{2}{jC\omega}} = \frac{2jL\omega}{2 - LC\omega^2}$.

d'où $\underline{u} = \dfrac{2jL\omega}{2 - LC\omega^2} \cdot \dfrac{1}{R + \frac{2jL\omega}{2 - LC\omega^2}}\underline{v_e}$ soit

$$\underline{u} = \frac{2jL\omega}{2R + 2jL\omega - RLC\omega^2}\underline{v_e} \tag{1.2}$$

En combinant (1.1) et (1.2), on en déduit $\underline{v_s} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2jL\omega}{2R + 2jL\omega - RLC\omega^2}\underline{v_e}$.

Finalement

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{jL\omega}{2R + 2jL\omega - RLC\omega^2}}$$

V - Sonde atténuatrice d'oscilloscope

1. Pour $f = 0$ (régime statique), $\boxed{\underline{H}(0) = \dfrac{R_o}{R_o + R_s}}$.

2. On commence par analyser le circuit par blocs : $\forall\omega,\ \underline{H}(j\omega) = \dfrac{\left(\underline{Z}_{C_{s2}} \| \underline{Z}_{C_0} \| \underline{Z}_{R_o}\right)}{\left(\underline{Z}_{C_{s1}} \| \underline{Z}_{R_s}\right) + \left(\underline{Z}_{C_{s2}} \| \underline{Z}_{C_0} \| \underline{Z}_{R_o}\right)}$. Puis on trouve :
$$\boxed{\forall\omega,\ \underline{H}(j\omega) = \frac{R_o}{R_o + R_S}\,\frac{1 + jR_sC_{s1}\omega}{1 + j\frac{R_oR_s}{R_o+R_s}\left(C_o + C_{s2} + C_{s1}\right)\omega}}$$

3. $$\boxed{\forall\omega,\ |\underline{H}|(j\omega) = \frac{R_o}{R_o + R_S}\sqrt{\frac{1 + \left(R_sC_{s1}\omega\right)^2}{1 + \left(\frac{R_oR_s}{R_o+R_s}\left(C_o + C_{s2} + C_{s1}\right)\omega\right)^2}}}$$
$$\boxed{\forall\omega,\ \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) = \arctan\left(R_sC_{s1}\omega\right) - \arctan\left(\frac{R_oR_s}{R_o + R_s}\left(C_o + C_{s2} + C_{s1}\right)\omega\right)}$$

4. La fonction de transfert est un réel positif pour toute pulsation si $\forall\omega,\ \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) = 0$, donc si :
$$R_sC_{s1} = \frac{R_oR_s}{R_o + R_s}\left(C_o + C_{s2} + C_{s1}\right)$$
donc
$$\boxed{R_sC_{s1} = R_o(C_o + C_{s2})}$$
L'intérêt est qu'il n'y a pas de déphase entre l'entrée et la sortie puisque $\varphi(V_o) - \varphi(V_e) = \arg\left(\underline{H}\right) = 0$. Il n'y a donc aucun décalage temporel entre le signal entrant dans la sonde et le signal sortant de la sonde (et entrant dans l'oscilloscope). La sonde ne modifie donc que l'amplitude du signal et pas sa phase à l'origine : à l'oscilloscope, on observera exactement le signal d'entrée avec une amplitude plus petite.

5. Si la condition précédente est respectée alors
$$\boxed{\forall\omega,\ |\underline{H}|(\omega) = \frac{R_o}{R_o + R_S}}$$
indépendamment de la fréquence. Il est important que ce résultat ne dépende pas de la fréquence : en effet, un signal périodique quelconque est la superposition d'une infinité de signaux sinusoïdaux de pulsations multiples entières d'une pulsation fondamentale. Si le module de la transmittance dépendait de la fréquence alors tous les termes de la décomposition de Fourier « verraient » un module différent et serait donc atténués différemment : le signal de sortie serait totalement différent du signal d'entrée. Avec $|\underline{H}|$ indépendant de la fréquence, tous les termes de la décomposition de Fourier sont atténués de la même façon, et le signal de sortie est exactement le signal d'entrée, d'amplitude plus petite.
D'ailleurs, cette remarque est aussi valable pour le résultat en déphasage de la question 4. : puisque le déphasage est nul pour toute fréquence, un signal périodique quelconque ne sera pas non plus décalé temporellement par la sonde.
On rappelle que si on a $V_e(t) = \langle V_e\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} V_{em,n}\cos(n\omega t + \varphi_{e,n})$ alors on a $V_o(t) = |\underline{H}|(0)\langle V_e\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} |\underline{H}|(n\omega)V_{em,n}\cos(n\omega t + \varphi_{e,n} + \arg\left(\underline{H}(jn\omega)\right))$. Si le module et l'argument de la fonction de transfert sont indépendants de la fréquence et si l'argument est nul alors, on a : $V_o(t) = |\underline{H}|\langle V_e\rangle + |\underline{H}|\sum_{n=1}^{\infty} V_{em,n}\cos(n\omega t + \varphi_{e,n}) = |\underline{H}|V_e(t)$.

6. Il faut : $R_s = 9R_o = 9\,\mathrm{M\Omega}$ et $C_{s1} = \frac{R_o}{R_s}(C_o + C_{s2}) = \frac{1}{9} \times 116\,\mathrm{pF} = 13\,\mathrm{pF}$.