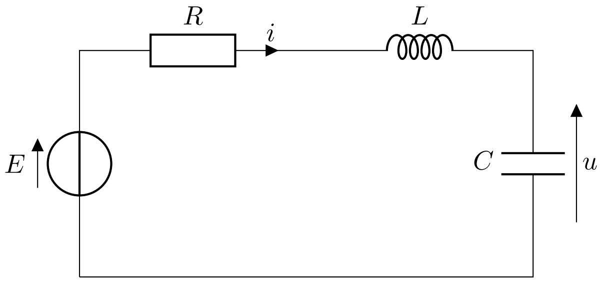
OS – TD 7

Oscillateurs amortis en régime transitoire

I - Décrément logarithmique

On considère un circuit RLC série, soumis à un échelon de tension :



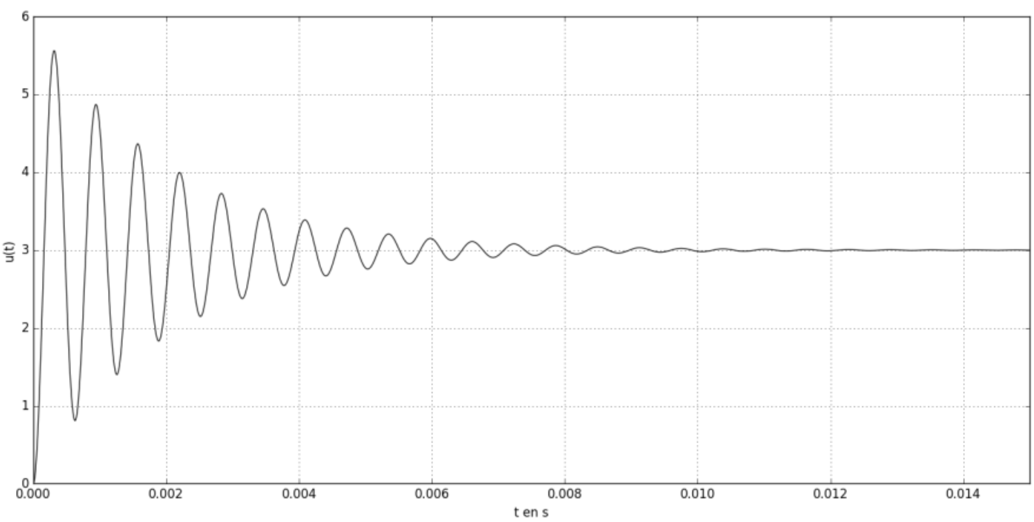
1. Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de $u(t)$. Vous expliciterez la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q en fonction des paramètres du problème.

On suppose, pour toute la suite de l'exercice, que le régime transitoire obtenu est pseudo-périodique.

2. Quelle condition cela implique-t-il sur la valeur de Q ?
3. Exprimer $u(t)$ en faisant apparaitre le temps de relaxation τ, la pseudo-pulsation ω et la tension atteinte une fois le régime permanent final établi u_∞.
4. Exprimer la pseudo-période T en fonction de la période associée à la pulsation propre T_0. Que peut-on en dire si $Q \gg 1$?
5. On définit n le nombre d'oscillations effectuées par la tension avant que le régime transitoire disparaisse. Exprimer n en fonction de Q. Simplifier cette expression dans le cas où $Q \gg 1$.
6. Tracer le chronogramme de $u(t)$ en prenant $Q = 5$.

On définit le **décrément logarithmique** δ par : $\boxed{\delta = \ln\left(\frac{u(t) - u_\infty}{u(t+T) - u_\infty}\right)}$

7. Montrer que $\delta = \frac{\omega_0 T}{2Q} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}$. Simplifier l'expression précédente dans le cas où $Q \gg 1$.
8. On a obtenu l'oscillogramme suivant. Déterminer la valeur de T et δ. En déduire la valeur de Q et ω_0.



II - Régime transitoire d'un circuit RLC parallèle

On étudie le circuit de la figure 1.1, appelé « circuit bouchon ».

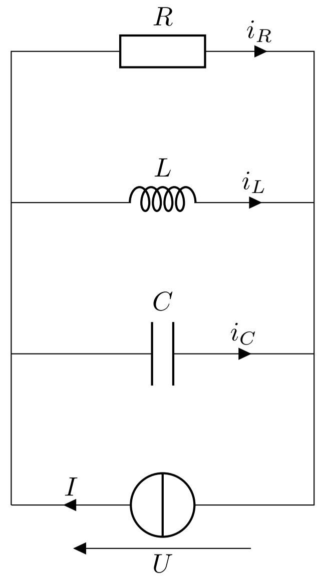


FIGURE 1.1 – Circuit bouchon, pour $t > 0$, avec $I = Cste$.

1. Donner les relations entre :
   (a) i_R et u,
   (b) i_L et u,
   (c) i_C et u.

La source est éteinte. On l'allume à $t = 0$, ce qui produit un échelon de courant I.

2. Déterminer la valeur finale de u en utilisant uniquement des raisonnements sur les comportements asymptotiques des dipôles quand le régime permanent sera atteint.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par u pour $t > 0$.
4. Après avoir rappelé la forme canonique de ce type d'équation différentielle, définir le facteur d'amortissement α, la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q en fonction de R, L et C.
5. On donne $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $L = 1{,}0 \cdot 10^2\,\mathrm{mH}$ et $C = 0{,}10\,\mathrm{\mu F}$. Calculer Q, ω_0 et α.
6. Résoudre l'équation caractéristique associée à cette équation différentielle. On prendra soin d'introduire, en les explicitant, les notations classiques associées à ce type de problème de façon à avoir des expressions simples pour les racines de cette équation.
7. En déduire la nature du régime transitoire obtenu et la forme générale de la solution $u(t)$. On ne cherche pas à cette étape à déterminer les constantes d'intégration.

On dispose des conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} i_L(t = 0^-) &= i_0 \\ q(t = 0^-) &= q_0 \end{aligned}$$

8. Traduire ces conditions initiales de manière à obtenir les valeurs de $u(t = 0^+)$ et $\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_{(t=0^+)}$ en fonction de R, C, q_0, I et i_0.
9. Terminer la résolution de l'équation différentielle en donnant l'expression finale complète de $u(t)$. Vérifier qu'elle permet bien de retrouver les conditions initiales.

III - Amortisseurs de voiture – Étude statique et régime transitoire

On modélise un des quatre systèmes amortisseurs de la suspension d'une petite voiture télécommandée roulant sur une surface parfaitement horizontale par un objet ponctuel de masse m (représentant un quart de la masse du véhicule), et repéré par la position M, attaché à une extrémité d'un ressort vertical de raideur $k = 10\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 50\,\mathrm{cm}$ dont l'autre extrémité est liée à un point O (la roue) situé au sol et qui est le point le plus bas du dispositif.
On note $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur et $\vec{u}_z$ le vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{OM} = z\,\vec{u}_z$. Pour les applications numériques, on prendra $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Le point O et l'axe (Oz) sont fixes dans le référentiel d'étude.
En plus de son poids et de la force de rappel élastique, l'objet est soumis à des frottements fluides dont on modélise l'effet de façon linéaire par l'expression $\vec{F} = -h\,\vec{v} = -h\,v\,\vec{u}_z$ où $v = \dot{z}$ est la vitesse verticale de l'objet dans le référentiel d'étude. Le coefficient h peut-être réglé par la variation du débit d'huile à travers un trou percé dans le piston mobile de l'amortisseur.
Pour une raison quelconque, l'objet a, à $t = 0$, la vitesse $\dot{z}(t = 0) = v_0$ et la position initiale z_0. À l'aide de différents capteurs, on relève en fonction du temps l'évolution de sa position z et de sa vitesse $\dot{z}$. Ces données permettent de tracer la représentation de la figure 1.2, pour $t \geq 0$.

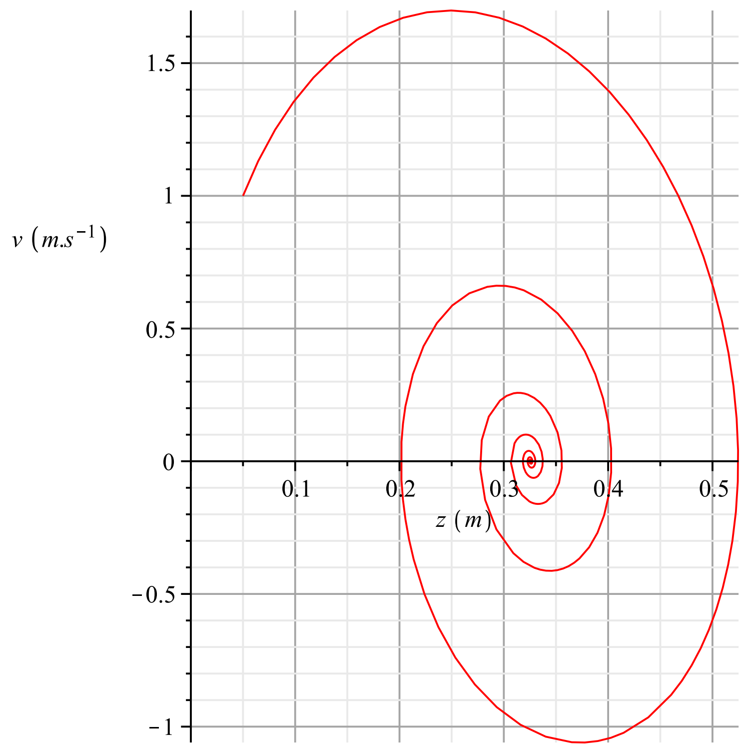


FIGURE 1.2 – Représentation de la vitesse de l'objet de masse m en fonction de la position en unités du système international pour $t \geq 0$. La courbe se lit chronologiquement dans le sens horaire. Elle est complète, c'est-à-dire que la totalité des données en vitesse et position pour $t \in [0\,;+\infty[$ sont représentées.

1. Déduire de la représentation de la figure 1.2 :
   (a) une estimation de la vitesse initiale v_0 de l'objet ;
   (b) une estimation de sa position initiale z_0 ; le ressort est-il initialement comprimé ou étiré ?
   (c) une estimation de la longueur à l'équilibre z_{eq} du ressort ;
   (d) la nature du régime transitoire ;
   (e) une estimation du facteur de qualité du système (justifier).
2. À l'aide de la question précédente, prévoir l'allure de z en fonction du temps et la tracer en légendant le chronogramme et en reportant un maximum d'informations.
3. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de z en fonction du temps.
4. À l'aide de l'équation précédente, déterminer l'expression de la position d'équilibre z_{eq} qui est la garde au sol du véhicule en régime stabilisé. En déduire à l'aide de la question 1 une estimation de la valeur de la masse m à deux chiffres significatifs.