Correction OS – TD 7

Oscillateurs amortis en régime transitoire

I - Décrément logarithmique

1. On écrit la loi des mailles $E = u_R + u_L + u_C = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u$ et la relation courant-tension aux bornes du condensateur $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. On obtient l'équation différentielle régissant $u(t)$ qu'on réécrit sous forme canonique :
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,u(t) = \omega_0^2\,E} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$
2. L'équation caractéristique associée est $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$, dont le discriminant est : $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2$.
   Pour avoir un régime pseudo-périodique, il faut $\Delta < 0$ soit $\boxed{Q > \frac{1}{2}}$.
3. — Les 2 racines complexes de l'équation précédentes sont alors $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\,\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.
   — On pose $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ et $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$, l'expression de u est alors $u(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega t + \varphi) + u_\infty$.
   — u_∞ correspond à la tension aux bornes du condensateur une fois le régime permanent atteint. La bobine est alors équivalente à un fil et le condensateur à un interrupteur ouvert. On en déduit $i_\infty = 0$ et donc $u_\infty = E$.
   — A et φ sont donnés par les conditions initiales. En supposant que, en $t < 0$, i et u sont nuls, on en déduit, par continuité de la tension aux bornes du condensateur $u(t = 0^+) = A\cos(\varphi) + E = 0$. De même, i étant le courant à travers la bobine, on a $i(t = 0^+) = 0$ soit $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = 0$ ce qui donne $-A\omega\sin(\varphi) = 0$. Au final $A = -E = -u_\infty$ et $\varphi = 0$. Soit
$$\boxed{u(t) = u_\infty\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega t)\right)}$$
4. $T = \frac{2\pi}{\omega}$ soit $\boxed{T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - 1/4Q^2}}}$. Si $Q \gg 1$, $T \approx T_0$ (en pratique, il suffit que $1/4Q^2$ soit petit devant 1, cette approximation est justifiable dès que $Q \geq 5$).
5. Par convention, le régime transitoire disparait au bout de 3τ (le signal a alors atteint 95 % de sa valeur finale). Le nombre d'oscillations effectuées par la tension pendant cet intervalle de temps est donc
   $n = \frac{3\tau}{T} = 5\frac{2Q}{\omega_0}\cdot\frac{\sqrt{1-1/4Q^2}}{T_0}$ soit $\boxed{n = \frac{3Q}{\pi}\sqrt{1 - 1/4Q^2}}$. Si $Q \gg 1$, on a alors $n \approx \frac{3Q}{\pi} \approx Q$. Lors de la lecture d'un chronogramme, on peut alors assimiler le nombre d'oscillations distinguables au facteur de qualité Q.
6. Pour tracer le chronogramme de $u(t)$, on commence par tracer en pointillés l'asymptote $y_0(t) = u_\infty$ et les deux enveloppes $y_1(t) = u_\infty\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ et $y_2(t) = u_\infty\left(1 + e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$. On finit enfin par $u(t)$ en traçant $Q = 5$ oscillations avant la fin du régime transitoire.
7. On a $u(t) - u_\infty = -u_\infty e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega t)$ donc $u(t+T) - u_\infty = -u_\infty e^{-\frac{t+T}{\tau}}\cos(\omega t)$ (car le cos est périodique de période T). Soit $\frac{u(t)-u_\infty}{u(t+T)-u_\infty} = \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{e^{-\frac{t+T}{\tau}}} = e^{\frac{T}{\tau}}$. On en déduit $\delta = \frac{T}{\tau}$. Compte tenu des expressions de T et τ obtenues précédemment, on trouve $\boxed{\delta = \frac{\omega_0 T}{2Q} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}}$. Si $Q \gg 1$, $\delta \approx \frac{\pi}{Q}$.
8. On voit directement $u_\infty = 3\,\mathrm{V}$.
   — Le premier minimum de la courbe est en $t = 0$, le 11ᵉ en $t = 6{,}3\,\mathrm{ms}$. Donc $T = 0{,}63\,\mathrm{ms}$
   — On a $u(0) - u_\infty = -3\,\mathrm{V}$ et $u(6T) - u_\infty = -0{,}45\,\mathrm{V}$ donc $6\delta = \ln\left(\frac{-3}{-0{,}45}\right)$ soit $\delta = 0{,}316$.
   — On distingue plus de dix oscillations sur le chronogramme, on peut alors utiliser les relations simplifiées pour $Q \gg 1$. En prenant $T = \frac{2\pi}{10}\mathrm{ms}$ et $\delta = \frac{\pi}{10}$, on obtient $\omega_0 = 10\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ et $Q = 10$.

II - Régime transitoire d'un circuit RLC parallèle

1. Avec tous les dipôles en convention récepteur : (a) : $\boxed{i_R = \dfrac{u}{R}}$; (b) : $\boxed{u = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}}$; (c) $\boxed{i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$.
2. Pour les temps positifs, la consigne imposée au circuit est stationnaire. Donc le régime permanent, qui sera atteint au bout d'un temps suffisamment long, sera lui aussi stationnaire. On aura donc $\forall t \gg \tau$, $i_L(t) \approx i_{L,SP}(t) = Cste$. Or $\forall t > 0$, $u(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$ donc $\forall t \gg \tau$, $u(t) \approx 0$. Ceci suffit également pour conclure que $\boxed{u_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 0}$.
3. On écrit la loi des nœuds :
$$\forall t > 0,\ I = i_R(t) + i_C(t) + i_L(t) \text{ ou encore : } \forall t > 0,\ I = \frac{u(t)}{R} + C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + i_L(t)$$
On dérive cette équation par rapport au temps :
$$\forall t > 0,\ 0 = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + C\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{u(t)}{L}$$
Enfin, on la normalise :
$$\boxed{\forall t > 0,\ \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u(t)}{LC} = 0}$$
4. Les formes canoniques sont :
$$\forall t > 0,\ \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,u(t) = \omega_0^2\,u_\infty$$
et
$$\forall t > 0,\ \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\,\alpha\,\omega_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,u(t) = \omega_0^2\,u_\infty$$
On en déduit, par identification :
$$\begin{cases} \frac{\omega_0}{Q} &=& \frac{1}{RC} \\ \omega_0^2 &=& \frac{1}{LC} \\ 2\,\alpha &=& \frac{1}{Q} \\ u_\infty &=& 0 \end{cases} \text{ d'où } \boxed{\begin{cases} \omega_0 &=& \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q &=& R\sqrt{\frac{C}{L}} \\ \alpha &=& \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}} \\ u_\infty &=& 0 \end{cases}}$$
5. A.N. : $Q = 10$; $\omega_0 = 1{,}0 \cdot 10^4\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$; $\alpha = 0,050$.
6. On pose l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle :
$$\lambda^2 + \frac{\omega_0}{Q}\lambda + \omega_0^2 = 0 \text{ dont le discriminant est : } \Delta = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$$
On a $Q = 10 > \frac{1}{2}$, donc $\Delta < 0$ et les racines sont complexes conjuguées :
$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\,\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$
qu'on réécrit en introduisant le temps de relaxation τ et la pseudo-pulsation ω :
$$\boxed{r_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm j\,\omega} \text{ avec } \boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = 2RC} \text{ et } \boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$
7. Le régime transitoire est donc pseudo-périodique et la forme générale de la solution est :
$$\boxed{\forall t > 0,\ u(t) = u_\infty + A\,e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega\,t + \varphi)}$$

8. Détermination de $u(t=0^+)$: on sait que $\forall t, u(t) = \frac{q(t)}{C}$ et que, à $t = 0^-$, $q(t=0^-) = q_0$, donc $u(t = 0^-) = \frac{q_0}{C}$. La tension aux bornes d'un condensateur étant continue temporellement, on a donc :

$$\boxed{u(t=0^+) = u(t=0^-) = \frac{q_0}{C}}$$

Détermination de $\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_{(t=0^+)}$:

$$\forall t > 0,\ I = i_R(t) + i_C(t) + i_L(t) = \frac{u(t)}{R} + C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + i_L(t)$$

donc

$$\text{à } t = 0^+,\ I = \frac{u(t=0^+)}{R} + C\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_{(t=0^+)} + i_L(t=0^+)$$

L'intensité du courant traversant une bobine étant continue temporellement, on a donc $i_L(t = 0^+) = i_L(t = 0^-) = i_0$. Finalement :

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_{(t=0^+)} = -\frac{q_0}{RC^2} + \frac{I - i_0}{C}}$$

9. Dans la suite, on prend $u_\infty = 0$. On prépare le système d'équations utiles :

$$\forall t > 0,\ \left\{\begin{array}{rcl} u(t) & = & A\,e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega\,t+\varphi) \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} & = & -\frac{A}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega\,t+\varphi) - \omega\,A\,e^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\omega\,t+\varphi) \end{array}\right.$$

On écrit ce système en $t = 0^+$:

$$\text{à } t = 0^+,\ \left\{\begin{array}{rcl} \frac{q_0}{C} & = & A\,\cos(\varphi) \\ -\frac{q_0}{RC^2} + \frac{I-i_0}{C} & = & -\frac{A}{\tau}\cos(\varphi) - \omega\,A\,\sin(\varphi) \end{array}\right.$$

On organise le système en isolant les inconnues à gauche et les données à droite :

$$\text{à } t = 0^+,\ \left\{\begin{array}{rcl} A\,\cos(\varphi) & = & \frac{q_0}{C} \\ A\,\sin(\varphi) & = & \frac{1}{\omega}\left(\frac{q_0}{RC^2} - \frac{A}{\tau}\cos(\varphi) - \frac{I-i_0}{C}\right) \end{array}\right.$$

Étant donné que $\tau = 2RC$ et que $A\,\cos(\varphi) = \frac{q_0}{C}$, on remarque que $\frac{q_0}{RC^2} - \frac{A}{\tau}\cos(\varphi) = \frac{q_0}{2RC^2}$.
Finalement, en prenant la somme des carrés des deux lignes et le rapport des deux lignes, on trouve :

$$\forall t \geq 0,\ u(t) = A\,e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega\,t+\varphi)$$

avec

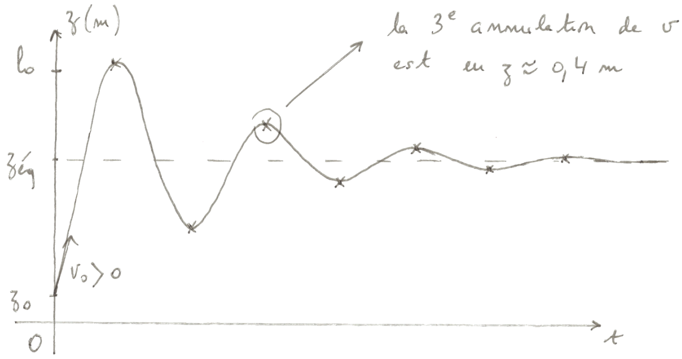
$$\boxed{A = \sqrt{\left(\frac{q_0}{C}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega}\left(\frac{q_0}{2RC^2} + \frac{i_0 - I}{C}\right)\right)^2} \quad \text{et} \quad \tan(\varphi) = \frac{C}{q_0\omega}\left(\frac{q_0}{2RC^2} + \frac{i_0 - I}{C}\right)}$$

Remarque : étant donné que $A\,\cos(\varphi) = \frac{q_0}{C} > 0$, on peut en déduire que $\varphi = \arctan\left(\frac{C}{q_0\omega}\left(\frac{q_0}{2RC^2} + \frac{i_0-I}{C}\right)\right)$.

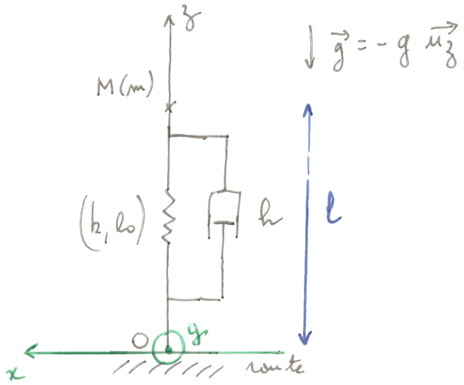
III - Amortisseurs de voiture – Étude statique et régime transitoire

1. Par lecture de la courbe :
   (a) $v_0 = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$;
   (b) $z_0 = 0{,}05\,\mathrm{m} < \ell_0 = 0{,}5\,\mathrm{m}$; le ressort est donc initialement comprimé ;
   (c) $0{,}32\,\mathrm{m} < z_{eq} < 0{,}33\,\mathrm{m}$;
   (d) le régime transitoire est pseudo-oscillatoire car on observe bien plusieurs phases de vitesses positives et négatives, ce qui prouve que l'objet oscille ;
   (e) $Q \approx 5$ puisqu'on voit environ 5 successions de vitesses positives puis négatives.

2. Initialement, la vitesse est positive donc z commence par croître. La vitesse v est nulle quand z est extrémale, ce qui permet de positionner les maxima et minima de z. Le premier maximum de z est légèrement supérieur 0,5 m. Le troisième est environ à 0,4 m, etc. La valeur finale est z_{eq} identifiée à la question précédente.



3. On commence par un schéma.



— Système étudié : objet ponctuel situé en M, de masse m, et représentant un quart le masse de la voiture.

— Référentiel $(\mathcal{R})$ lié à la route. Repère (O, x, y, z) cartésien dans $(\mathcal{R})$. Base orthonormée et cartésienne dans $(\mathcal{R})$: $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

— $\overrightarrow{OM} = z\,\vec{u}_z$; $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{z}\,\vec{u}_z$; $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \ddot{z}\,\vec{u}_z$.

— Bilan des forces s'exerçant sur le système :

  — poids : $\overrightarrow{P} = m\,\vec{g} = -mg\,\vec{u}_z$;

  — force de rappel élastique : $\overrightarrow{F}_{el} = -k\,(\ell - \ell_0)\,\vec{u}_z$ avec $\ell = z$ d'où $\overrightarrow{F}_{el} = -k\,(z - \ell_0)\,\vec{u}_z$;

  — force de frottement fluide linéaire : $\overrightarrow{F}_f = -h\,\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = -h\,\dot{z}\,\vec{u}_z$.

— On applique la RFD à M dans le référentiel $(\mathcal{R})$ supposé galiléen :

$$\forall t,\ m\,\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F}_{el} + \overrightarrow{F}_f$$

$$\forall t,\ m\,\ddot{z}\,\vec{u}_z = -mg\,\vec{u}_z - k\,(z(t) - \ell_0)\,\vec{u}_z - h\,\dot{z}\,\vec{u}_z$$

On projette l'équation vectorielle précédente sur le vecteur $\vec{u}_z$:

$$\boxed{\forall t,\ m\,\ddot{z} = -mg - k\,(z(t) - \ell_0) - h\,\dot{z}}$$

4. À l'équilibre, la masse est immobile dans $(\mathcal{R})$ et on a donc $\forall t,\ \dot{z} = 0$ et $\forall t,\ \ddot{z} = 0$. D'autre part, à l'équilibre $\forall t,\ z(t) = z_{eq}$. On reporte ces résultats dans l'équation différentielle :

$$\forall t,\ 0 = -mg - k\,(z_{eq} - \ell_0)$$

et finalement

$$\boxed{z_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k}}$$

Remarque : on retrouve bien que $z_{eq} < \ell_0$, ce qui est logique puisque la voiture comprime le ressort.

On en déduit :

$$\boxed{m = \frac{k}{g}\,(\ell_0 - z_{eq})}$$

A.N. : $m = \frac{10\,\mathrm{N\,m^{-1}}}{10\,\mathrm{m\,s^{-2}}} \times (0{,}5\,\mathrm{m} - 0{,}325\,\mathrm{m}) = \frac{10\,\mathrm{kg\,s^{-2}}}{10\,\mathrm{m\,s^{-2}}} \times 0{,}175\,\mathrm{m} = 0{,}175\,\mathrm{kg} = 0{,}18\,\mathrm{kg}$.