Correction OS – TD 6

Oscillateur harmonique

I - Différentes configurations de ressort

Dans tous les cas, $\vec{F} = -k\,(l - l_0)\,\vec{u}$ où $\vec{u}$ est la direction de l'allongement du ressort au point où on considère la force de rappel. Les difficultés consistent à identifier la direction d'allongement et à exprimer correctement la longueur du ressort en fonction de la coordonnée de position x, sachant que x peut être positif où négatif suivant la position du point M par rapport à l'origine O.

Cas A : $\vec{u} = \vec{u}_x$ et $l = x$, donc $\boxed{\vec{F} = -k\,(x - l_0)\,\vec{u}_x}$.

Cas B : $\vec{u} = -\vec{u}_x$ et $l = -x$, donc $\vec{F} = -k\,(-x - l_0)\,(-\vec{u}_x)$ et $\boxed{\vec{F} = k\,(-x - l_0)\,\vec{u}_x}$.

Cas C : cette configuration est rigoureusement identique à celle du Cas B.

Cas D : cette configuration est rigoureusement identique à celle du Cas A.

Cas E : la longueur du ressort est $x_2 - x_1$ et :

— en M_1, le ressort s'allonge dans la direction $-\vec{u}_x$, donc $\vec{F}_{surM_1} = -k\,(x_2 - x_1 - l_0)\,(-\vec{u}_x)$ et

$$\boxed{\vec{F}_{surM_1} = k\,(x_2 - x_1 - l_0)\,\vec{u}_x}$$

— en M_2, le ressort s'allonge dans la direction $\vec{u}_x$, donc $\boxed{\vec{F}_{surM_2} = -k\,(x_2 - x_1 - l_0)\,\vec{u}_x}$.

Remarque : le cas E est un modèle simple de molécule chimique avec liaison covalente entre deux atomes. La liaison covalente est modélisée par le ressort et les atomes par les deux masses ponctuelles. La distance à l'équilibre entre les deux masses correspond à la longueur de liaison. L'énergie potentielle élastique à l'équilibre correspond à l'énergie de liaison (c'est-à-dire l'énergie qu'il faut fournir à la molécule pour rompre la liaison chimique).

II - Équations différentielles

1. L'équation différentielle d'un oscillateur harmonique à une dimension selon l'axe des y peut se mettre sous la forme
$$\forall t,\ \ddot{y} + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 y_{eq}, \quad y \in \mathbb{R},\ \omega_0 \in \mathbb{R}^{+*}$$
On essaie d'identifier les équations fournies avec la forme canonique ci-dessus, en normalisant les équations avec un facteur égal à un devant la dérivée seconde et en passant les termes constants au second membre.

(a) $\forall t,\ \ddot{y} - \frac{k}{m} y(t) = -\frac{k}{m} l_0$

(b) $\forall t,\ \ddot{y} - \frac{k}{m} y(t) = \frac{k}{m} l_0$

(c) $\forall t,\ \ddot{y} + \frac{k}{m} y(t) = \frac{k}{m} l_0$

(d) $\forall t,\ \ddot{y} + \frac{k}{m} y(t) = -\frac{k}{m} l_0$

(e) $\forall t,\ \ddot{y} - \frac{k}{m} y(t) = \frac{k}{m} l_0 + g$

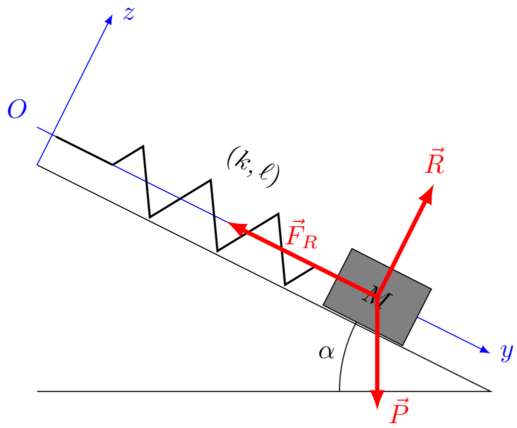
(f) $\forall t,\ \ddot{y} + \frac{k}{m} y(t) = \frac{k}{m} l_0 - g$

Seules les équations (c), (d) et (f) sont des équations d'oscillateur harmonique. Pour les équations (a), (b) et (e), l'identification mènerait à
$$\omega_0^2 = -\frac{k}{m},\ \text{soit } \omega_0 = \sqrt{-\frac{k}{m}}$$
ce qui est impossible puisque que k et m sont positifs.

2. Identifications :
   (c) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $y_{eq} = l_0$;
   (d) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $y_{eq} = -l_0$;
   (f) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $y_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}$.

III - Extrapolation de solution

On choisit un axe (Oy) orienté de façon que le mouvement soit entièrement le long de cet axe et que la position de l'objet soit repérée par $y > 0$, et donc un axe (Oz) qui n'est pas vertical.



Le bilan des forces exprimé dans ce repère donne :
- $\vec{P} = m\vec{g} = mg\sin(\alpha)\,\vec{u}_y - mg\cos(\alpha)\,\vec{u}_z$
- $\vec{F}_R = -k(y - l_0)\,\vec{u}_y$
- $\vec{R} = R\vec{u}_z$ (absence de frottement donc $\vec{R} \perp \vec{u}_y$)

La RFD projetée sur l'axe (Oy) donne $m\ddot{y} = mg\sin(\alpha) - k(y - l_0)$ soit $\ddot{y} + \frac{k}{m}y = g\sin(\alpha) + \frac{k}{m}l_0$. L'identifciation de cette expression avec la forme canonique de l'oscillateur harmonique donne

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad y_{eq} = \ell_0 + \frac{m\,g}{k}\sin(\alpha)}$$

On peut remarquer que l'on a la même pulsation propre que dans les cas des ressorts horizontaux et verticaux. Pour $\alpha = 0$ on retrouve bien la longueur à l'équilibre du ressort horizontal ($y_{eq} = l_0$) et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ celle du ressort vertical $y_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$.

IV - Lectures de courbes

Forme générale : $\forall t,\ u(t) = u_{eq} + u_m\,\cos(\omega\,t + \varphi)$.
Première courbe, on lit :
- $2T_0 = 0{,}040\,\mathrm{s}$ d'où $f_0 = 50\,\mathrm{Hz}$;
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 3{,}1 \cdot 10^2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$;
- $u_{eq} = 1{,}0\,\mathrm{V}$; $u_m = 2{,}0\,\mathrm{V}$; $u(t=0) = 2{,}75\,\mathrm{V}$; on en déduit :

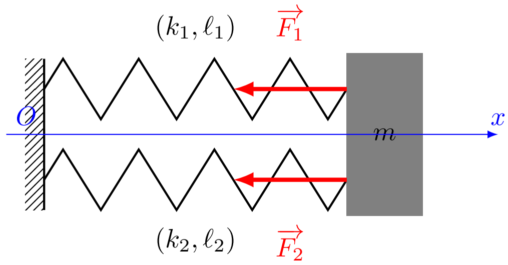
$$\varphi = \arccos\left(\frac{u(t=0) - u_{eq}}{u_m}\right) = \arccos\left(\frac{1,75}{2}\right) \approx \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0{,}5\,\mathrm{rad}$$

Seconde courbe, on lit :
- $2T_0 = 0{,}0040\,\mathrm{s}$ d'où $f_0 = 5{,}0 \cdot 10^2\,\mathrm{Hz}$;
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 3{,}1 \cdot 10^3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$;
- $u_{eq} = -3{,}0\,\mathrm{V}$; $u_m = 2{,}0\,\mathrm{V}$; $u(t=0) = -3\,\mathrm{V}$; on en déduit :

$$\varphi = \arccos\left(\frac{u(t=0) - u_{eq}}{u_m}\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

V - Association de ressorts

a) On prend un axe (Ox) parallèle aux ressorts, le point O étant au niveau de la paroi fixe :



Les forces s'appliquant sur la masse m sont :
$\vec{F_1} = -k_1(x - \ell_1)\,\vec{u}_x$,
$\vec{F_2} = -k_2(x - \ell_2)\,\vec{u}_x$,

La RFD s'écrit $m\vec{a} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ ce qui, projeté sur l'axe (Ox), donne

$$m\ddot{x} = -k_1(x - \ell_1) - k_2(x - \ell_2)$$

ou encore

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m}x = \frac{k_1\ell_1 + k_2\ell_2}{m}}$$

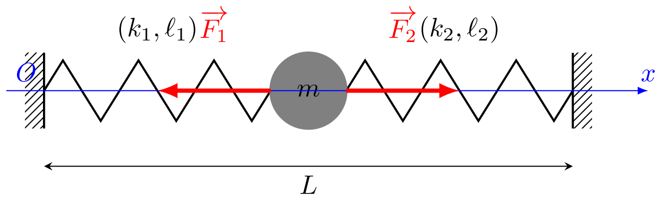
En identifiant à la forme canonique de l'équation $\ddot{x} + \omega_0^2\,x = \omega_0^2\,x_{eq}$, on trouve

$$\omega_0^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} \quad \text{et} \quad x_{eq} = \frac{k_1\ell_1 + k_2\ell_2}{k_1 + k_2}$$

et donc

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}}$$

b) On prend un axe (Ox) parallèle aux ressorts, le point O étant au niveau de la paroi fixe de gauche :



Les forces s'appliquant sur la masse m sont :
$\vec{F_1} = -k_1(x - \ell_1)\,\vec{u}_x$,
$\vec{F_2} = -k_2\,[(L - x) - \ell_2]\,(-\vec{u}_x)$,

La RFD projetée sur l'axe (Ox) donne $m\ddot{x} = -k_1(x - \ell_1) + k_2(L - x - \ell_2)$ soit

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m}x = \frac{k_1\ell_1 + k_2(L - \ell_2)}{m}}$$

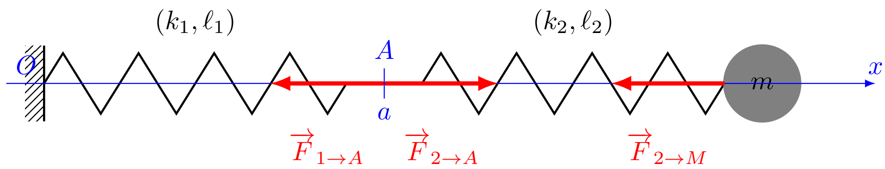
L'identification avec la forme canonique mène à

$$\omega_0^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} \quad \text{et} \quad x_{eq} = \frac{k_1\ell_1 + k_2(L - \ell_2)}{k_1 + k_2}$$

et donc

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}}$$

c) On prend un axe (Ox) parallèle aux ressorts, le point O étant au niveau de la paroi fixe et on appelle A le point de jonction des deux ressorts, en notant son abscisse a :



Seul le ressort 2 exerce une force sur la masse m : $\vec{F}_{2\to M} = -k_2\,[(x - a) - \ell_2]\,\vec{u}_x$,
La RFD projetée sur l'axe (Ox) donne $m\ddot{x} = -k_2(x - a - \ell_2)$ mais, le point A étant mobile, a est une fonction du temps qu'il faut exprimer.
Pour cela, nous allons nous intéresser aux forces s'exerçant sur A :

— le ressort de gauche exerce $\overrightarrow{F}_{1\to A} = -k_1(a-\ell_1)\,\vec{u}_x$,

— le ressort de droite exerce $\overrightarrow{F}_{2\to A} = -k_2\left[(x-a)-\ell_2\right]\,(-\vec{u}_x)$,

Le point A étant virtuel, sa masse est nulle et la RFD s'écrit alors $\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_{1\to A} + \overrightarrow{F}_{2\to A} = \overrightarrow{0}$
En projetant sur l'axe (Ox) on trouve $-k_1(a-\ell_1)+k_2(x-a-\ell_2)=0$ soit

$$(k_1+k_2)a = k_2x + (k_1\ell_1 - k_2\ell_2)$$

On reporte ensuite dans l'expression obtenue précédemment en appliquant la RFD sur le point M :

$$m\ddot{x} = -k_2\left[x - \frac{k_2}{k_1+k_2}x - \frac{k_1\ell_1-k_2\ell_2}{k_1+k_2} - \ell_2\right] = -k_2\left[\frac{k_1}{k_1+k_2}x - \frac{k_1\ell_1+k_1\ell_2}{k_1+k_2}\right]$$

ou encore

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)}x = \frac{k_1k_2(\ell_1+\ell_2)}{m(k_1+k_2)}}$$

On identifie à la forme canonique et on trouve

$$\omega_0^2 = \frac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)} \quad \text{et} \quad x_{eq} = \ell_1+\ell_2$$

et donc

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}}$$

VI - Résolution de problème

Dans tous les cas :

— système étudié : objet de masse m ;

— référentiel : $(\mathcal{R})$ lié au support et supposé galiléen ;

— repère : (O,x,y,z) cartésien dans $(\mathcal{R})$;

— position : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$;

— vitesse, en supposant le mouvement uniquement selon (Oy) : $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{y}\,\vec{u}_y$;

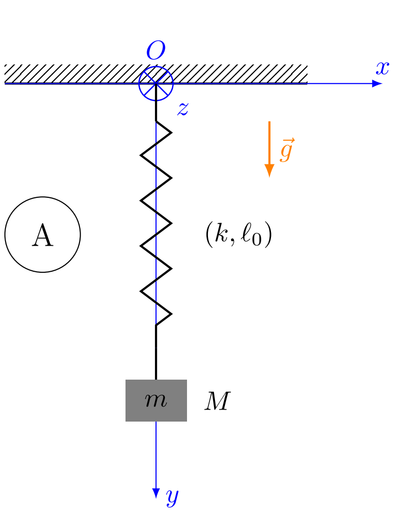
— accélération : $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \ddot{y}\,\vec{u}_y$;

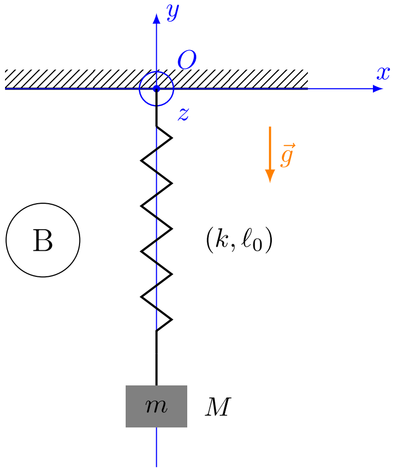
— poids : $\overrightarrow{P} = m\,\vec{g}$;

— force de rappel élastique : $\overrightarrow{F}_{el} = -k\,(\ell-\ell_0)\,\vec{u}$, avec $\vec{u}$ vecteur unitaire donnant le sens dans lequel le ressort s'allonge à son extrémité M subissant la force $\overrightarrow{F}_{el}$;

— l'objet de masse m n'étant pas lié au support, il n'y a pas de réaction du support…

On peut aussi prendre en compte des frottements mais l'élève indique des oscillations d'amplitudes constantes. L'expérience n'a sans doute pas été menée pendant suffisamment longtemps pour observer une décroissance de l'amplitude ; faute d'information supplémentaire, on néglige les frottements en première approximation. Autre argument : si on exploite uniquement les données de la photo, les frottements ne sont pas utiles au raisonnement puisqu'à l'équilibre les forces de frottements fluides qui s'exercent sur l'objet étudié sont nulles.
Il y a globalement deux façons de schématiser le problème : axe du mouvement vers le bas, schéma A, ou vers le haut, schéma B.





En l'absence de frottement, l'oscillateur sera harmonique et son équation différentielle sous forme canonique sera dans tous les cas :

$$\forall t > t_0,\ \ddot{y} + \omega_0^2\, y(t) = \omega_0^2\, y_{eq} \quad \text{avec} \quad \omega_0 \in \mathbb{R}^{+*}$$

A
- $\overrightarrow{P} = m\, g\, \vec{u}_y$;
- $\ell(t) = y(t) > 0$;
- $\vec{u} = \vec{u}_y$;
- $\overrightarrow{F}_{el} = -k\ (y(t) - \ell_0)\ \vec{u}_y$;
- RFD projetée sur $\vec{u}_y$: $\forall t > t_0, m\ddot{y} = m\, g - k(y(t) - \ell_0)$;
- mise en forme : $\forall t > t_0, \ddot{y} + \frac{k}{m} y(t) = \frac{k}{m}\left(\ell_0 + \frac{m\, g}{k}\right)$;
- paramètres canoniques : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $y_{eq} = \ell_0 + \frac{m\, g}{k}$;
- on lit sur la photo y_{eq} compris entre 13 et 15 cm ; on peut prendre, par exemple, 14 cm.

B
- $\overrightarrow{P} = -m\, g\, \vec{u}_y$;
- $\ell(t) = -y(t) > 0$;
- $\vec{u} = -\vec{u}_y$;
- $\overrightarrow{F}_{el} = k\ (-y(t) - \ell_0)\ \vec{u}_y$.
- RFD projetée sur $\vec{u}_y$: $\forall t > t_0, m\ddot{y} = -m\, g + k(-y(t) - \ell_0)$;
- mise en forme : $\forall t > t_0, \ddot{y} + \frac{k}{m} y(t) = \frac{k}{m}\left(-\ell_0 - \frac{m\, g}{k}\right)$;
- paramètres canoniques : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $y_{eq} = -\ell_0 - \frac{m\, g}{k}$
- on lit sur la photo y_{eq} compris entre -13 et -15 cm ; on peut prendre, par exemple, -14 cm.

Il y a ensuite deux façons de résoudre le problème : en exploitant uniquement les données de la photo ou en exploitant aussi les informations fournies par l'élève.

<u>Exploitation des données de la photo</u> : on a, pour les schémas A ou B, $k = \frac{m\, g}{\pm y_{eq} - \ell_0}$. On note a la longueur d'un côté d'une face de l'objet, on a alors $m = \frac{3\rho a^3 \sqrt{3}}{2}$, avec ρ la masse volumique de l'objet. Finalement :

$$\boxed{k = \frac{3\rho a^3 \sqrt{3}\, g}{2(\pm y_{eq} - \ell_0)}}$$

Application numérique : en prenant $a = 1\,\mathrm{cm}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $\rho = 8 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ (acier), $y_{eq} = \pm 14\,\mathrm{cm}$ et $\ell_0 = 8{,}5\,\mathrm{cm}$, on trouve $k = 4\,\mathrm{N\,m^{-1}}$.

Exploitation des autres informations : on résout l'équation différentielle et le problème de Cauchy, on trouve [1] une amplitude $y_m = \left|\frac{v_0}{\omega_0}\right|$ avec, pour les schémas A ou B, $v_0 = \pm 4 \cdot 10^1\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$. Étant donné que $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, on trouve :

$$\boxed{k = m\frac{v_0^2}{y_m^2} = \frac{3\rho a^3\sqrt{3}}{2}\frac{v_0^2}{y_m^2}}$$

Application numérique : $k = 4\,\mathrm{kg\,s^{-2}}$.

Remarque : quelle que soit la méthode, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}}$, d'où $k = m\frac{4\pi^2}{T_0^2}$, ce qui permet de lever l'ambiguïté sur la valeur de la période propre T_0. $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3\rho a^3\sqrt{3}}{2k}} = 0{,}45\,\mathrm{s}$ ce qui semble indiquer que la valeur observée par l'élève était sans doute $0{,}44\,\mathrm{s}$.

1. À faire chez vous.