

Correction OS – TD 13

Conversion de puissance électromécanique

I - Chute d'un cadre

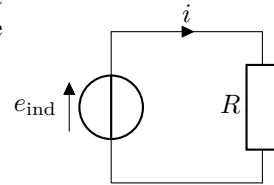
- Lorsque le cadre pénètre dans la zone de champ non nul, il est traversé dans sa partie basse par un flux. Ce flux varie car la surface augmente au fur et à mesure de la chute. Une f.é.m. induite apparaît dans le circuit qui, étant fermé, est alors parcouru par un courant induit. Le flux du champ à l'instant t vaut

$$\phi(t) = n\vec{B}_0 \cdot \vec{S}(x) = NB_0\vec{e}_z \cdot ax(t)\vec{e}_z = nB_0ax(t)$$

. D'après la loi de Faraday, la f.é.m. induite est $e_{\text{ind}} = -\frac{d\phi}{dt}$ soit $e_{\text{ind}} = -nB_0a\dot{x}(t)$.

Si le circuit est uniquement résistif, le cadre fonctionne selon le schéma électrique équivalent ci-contre et l'intensité électrique vérifie $e_{\text{ind}} = Ri$ d'où l'équation électrique

$$Ri = -nB_0a\dot{x}(t)$$



Remarque : on note bien pour la suite que le courant i est négatif.

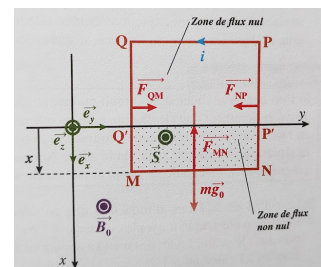
- Dans la question précédente, nous avons orienté le vecteur normal \vec{n} dans le sens de e_z . Cela implique que le courant i parcourt la spire dans le sens $MNPQ$. Les forces de Laplace valent :

$$\begin{cases} \vec{F}_{MN} = ni\overrightarrow{MN} \wedge \vec{B}_0 = nia\vec{e}_y \wedge B_0\vec{e}_z = niaB_0\vec{e}_x \\ \vec{F}_{PQ} = \vec{0} \text{ (pas de champ à ce niveau)} \\ \vec{F}_{NP} = ni\overrightarrow{NP}' \wedge \vec{B}_0 = ni(-x\vec{e}_x) \wedge B_0\vec{e}_z = nixB_0\vec{e}_y \text{ (pas de champ entre P' et P)} \\ \vec{F}_{QM} = ni\overrightarrow{Q'M} \wedge \vec{B}_0 = nix\vec{e}_x \wedge B_0\vec{e}_z = -nixB_0\vec{e}_y \text{ (pas de champ entre Q et Q')} \end{cases}$$

Au final

$$\vec{F}_L = niaB_0\vec{e}_x$$

On constate que les deux forces sur les côtés latéraux (NP et QM) se compensent. Compte-tenu du fait que i est négatif, le sens des forces est donné sur le schéma ci-contre : les forces de Laplace ont tendance à s'opposer à l'augmentation du flux, ce qui est conforme à la loi de Lenz. Les forces de Laplace à freiner la chute du cadre, à travers une résultante verticale vers le haut.



Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le cadre est soumis à son poids $\vec{P} = mg\vec{e}_x$, aux forces de Laplace et aux réactions des supports de guidage. En l'absence de frottement, ces réactions n'ont pas de composante en x , l'application de la RFD, projetée sur l'axe Ox donne l'équation mécanique

$$m\ddot{x} = mg + niaB_0$$

En remplaçant i par son expression donnée par l'équation électrique, on en déduit l'équation différentielle en x du mouvement :

$$\ddot{x} + \frac{n^2a^2B_0^2}{mR}\dot{x} = g \text{ soit } \dot{v} + \frac{n^2a^2B_0^2}{mR}v = g$$

L'équation différentielle précédente est du second ordre en x mais du premier en v . On en déduit, compte-tenu de la condition initiale $v(t=0) = 0$,

$$v(t) = \dot{x} = g\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ avec } \tau = \frac{mR}{n^2a^2B_0^2}$$

L'expression du courant est donnée par

$$i(t) = -\frac{nB_0 a}{R} v(t) = \frac{mg}{naB_0} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

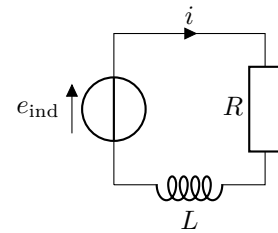
Lorsque t tend vers l'infini, la vitesse tend vers une vitesse limite $v_{lim} = g\tau = \frac{mRg}{n^2 a^2 B_0^2}$.

En pratique, cette vitesse limite est atteinte au bout de 3τ (à 95 %) ou 5τ (à 99 %)., à condition que le cadre ne soit à cet instant pas encore complètement dans la zone de champ non nul.

Une fois le cadre entre totalement dans la zone de champ, le flux du champ magnétique à travers le cadre devient constant, les phénomènes d'induction, et donc la force de Laplace, disparaissent. Le mouvement ultérieur est alors celui d'une chute libre.

3. Le calcul de la f.é.m. d'induction mené précédemment reste valable, mais il faut ajouter au circuit électrique équivalent l'auto-inductance dans le cadre. L'équation électrique devient alors

$$e_{ind} = -nB_0 a \dot{x}(t) = Ri + L \frac{di}{dt}$$



L'équation mécanique est elle identique à celle de la question précédente, on en déduit $i = \frac{m}{naB_0}(\ddot{x} - g)$ qui se dérive en $\frac{di}{dt} = \frac{m}{naB_0} \ddot{x}$.

En injectant cette expression dans l'équation électrique, on aboutit finalement à une équation différentielle d'ordre 3 en x , et donc d'ordre 2 en v :

$$\ddot{v} + \frac{R}{L} \dot{v} + \frac{n^2 a^2 B_0^2}{mL} v = \frac{R}{L} g$$

La solution de cette équation différentielle est la somme d'une solution homogène qui s'amortit et d'une solution particulière constante. La vitesse tend donc vers une vitesse limite, qui est la même que celle déterminée précédemment.

Le bilan de puissance s'effectue sur le système d'équation couplées, où l'on multiplie l'équation électrique par le courant et l'équation mécanique par la vitesse :

$$\begin{cases} -nB_0 a \dot{x} i = Ri^2 + L \frac{di}{dt} i \\ m \dot{v} = mgv + niaB_0 v \end{cases}$$

En remplaçant le terme en $niaB_0 v$ dans la 2^e équation, on trouve

$$m \dot{v} = mgv - Ri^2 - L \frac{di}{dt} i \quad \text{soit} \quad \frac{ud}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \vec{P} \cdot \vec{v} - Ri^2 - \frac{ud}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right)$$

Finalement :

$$\mathcal{P}_{pesanteur} = \mathcal{P}_{cinétique} + \mathcal{P}_{Joule} + \mathcal{P}_{magnétique}$$

La puissance motrice de la force de pesanteur (travail moteur du poids) se répartit entre la puissance cinétique (accélère le système), la puissance magnétique (énergie emmagasinée dans la bobine) et l'effet Joule (énergie dissipée dans la résistance sous forme de chaleur).

II - Haut-parleur « de Laplace »

1. Le champ magnétique est uniforme à l'échelle du circuit. Les variations de flux proviennent de la variation de surface du circuit, dû au mouvement de la tige mobile. Notons S_0 l'aire entourée par le circuit lorsque $x = 0$. On a alors $S(t) = S_0 + ax$.

Compte tenu du sens du courant dans le circuit indiqué sur le schéma de l'énoncé, le vecteur normal est égal à $+\vec{e}_z$. Ainsi, $\phi(t) = \vec{B} \cdot S\vec{n} = (S_0 + ax)B$ et, d'après la loi de Faraday,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -aB\dot{x}$$

2. Pour établir l'équation mécanique, appliquons la loi de la quantité de mouvement à l'ensemble tige et membrane, dans le référentiel terrestre. Les actions mécaniques qu'il subit sont

- son poids \vec{P} , vertical ;
- la réaction normale du rail \vec{N} , verticale aussi en négligeant les frottements solides, et dont on sait qu'elle compense le poids car le mouvement est selon \vec{e}_x seulement ;
- la force de frottements $\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{x}\vec{e}_x$ de l'air sur la membrane ;
- la force de Laplace exercée sur la tige, qui vaut

$$\vec{F}_L = i\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{B} = iaB(\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z) = iaB\vec{e}_x$$

- la force de rappel exercée par le ressort sur la tige,

$$\vec{F}_r = -k[(\ell_0 + x) - \ell_0]\vec{e}_x = -kx\vec{e}_x$$

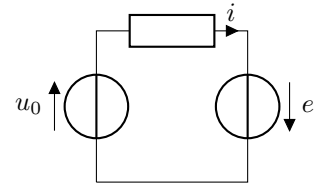
La relation fondamentale de la dynamique donne alors

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{f} + \vec{F}_L + \vec{F}_r$$

d'où, en projetant sur \vec{e}_x ,

$$\boxed{m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - kx + iaB}$$

Écrivons maintenant l'équation électrique en se basant sur un schéma électrique équivalent. Les effets à prendre en compte sont la tension de commande u_0 , la résistance R du circuit, et la f.é.m. d'induction e . D'après la loi des mailles,



$$u_0 + e = Ri \quad \text{soit} \quad \boxed{u_0 - aB\dot{x} = Ri}$$

3. On cherche une équation sur x : il faut donc remplacer i dans l'équation mécanique en utilisant l'équation électrique. D'après cette équation,

$$i = \frac{u_0}{R} - \frac{aB}{R}\dot{x},$$

ce qui donne

$$\boxed{m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - kx + \frac{aBu_0}{R} - \frac{(aB)^2}{R}\dot{x}}$$

C'est une équation d'oscillateur harmonique amorti, que l'on peut écrire sous forme canonique

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} \left(\alpha + \frac{(aB)^2}{R} \right) \dot{x} + kx = \frac{aBu_0}{R}$$

Lorsque l'on remplace i dans l'expression de la force de Laplace, on voit que celle-ci compte deux contributeurs : un terme de forçage constant, qui change la position d'équilibre de la tige, et un terme analogue à une force de frottement fluide, proportionnelle à \dot{x} . Le fait de trouver un terme de frottement (donc avec un signe $-$) est cohérent avec la loi de Lenz : l'induction a pour conséquence un freinage qui s'oppose au mouvement de la tige, source de l'induction.

4. Pour obtenir le bilan de puissance, on multiplie l'équation mécanique par \dot{x} et l'équation électrique par i , ce qui donne

$$m\dot{x}\ddot{x} = -\alpha\dot{x}^2 - kx\dot{x} + iaB\dot{x} \quad \text{et} \quad u_0i - aB\dot{x}i = Ri^2$$

En substituant dans l'équation électrique le terme en $aB\dot{x}i$ par son expression issue de l'équation mécanique, on trouve

$$u_0i = Ri^2 + m\dot{x}\ddot{x} + \alpha\dot{x}^2 + kx\dot{x}$$

soit

$$\boxed{u_0i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) + \alpha\dot{x}^2 + Ri^2}$$

Le membre de gauche traduit la puissance électrique fournie par le générateur. Cette puissance est utilisée pour modifier l'énergie mécanique de la partie mobile (tige et membrane), ce qu'indique le terme dans la dérivée (somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle associée au ressort). Une partie est « perdue » par frottements fluides, ce qui traduit l'émission de l'onde sonore. Enfin, le reste de cette puissance est dissipée sous forme de chaleur par effet Joule, décrit par le dernier terme du bilan de puissance.

III - Moteur synchrone

- On commence par s'intéresser au champ généré au point O (intersection des axes des 3 bobines) par une des bobines. Tout plan contenant l'axe de la bobine étant un plan d'antysymétrie des courants, on en déduit que le champ généré par cette bobine en O est porté par cette axe. Si on appelle \vec{u}_i le vecteur unitaire colinéaire à cet axe, orienté dans le sens du courant, on en déduit que le champ généré par la bobine n° i est $\vec{B}_i(O) = B_i(O)\vec{u}_i$.

Par ailleurs, les bobines sont identiques et parcourues par des courants de même amplitude, de même fréquence. De plus le point O est situé à la même distance des 3 bobines, on peut en déduire que les champs générés par les trois bobines en O sont des fonctions sinusoïdales du temps, de même fréquence et amplitude, avec un déphasage identique à celui entre les courant :

$$B_i(O) = B_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$$

En prenant la 1ère bobine comme référence des phases, et en choisissant Ox selon son axe, on en déduit

- $\vec{B}_1(O) = B_0 \cos(\omega t)\vec{e}_x$;
- $\vec{B}_2(O) = B_0 \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3})\vec{u}_2$ avec $\vec{u}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x - \frac{1}{2}\vec{e}_y$ soit $\vec{B}_2(O) = B_0 \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x - \frac{1}{2}\vec{e}_y \right)$;
- $\vec{B}_3(O) = B_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3})\vec{u}_3$ avec $\vec{u}_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_y$ soit $\vec{B}_3(O) = B_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_y \right)$;

Le champ total généré au niveau du point O est donc $\vec{B}(O) = \vec{B}_1(O) + \vec{B}_2(O) + \vec{B}_3(O)$.

Sa composante en x vaut

$$\begin{aligned} B_x(O) &= B_0 \left[\cos(\omega t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \right] \\ &= B_0 \left[\cos(\omega t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos \omega t \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \omega t \sin \frac{2\pi}{3} + \cos \omega t \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \omega t \sin \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ &= B_0 \cos(\omega t) \left(1 - 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{2\pi}{3} \right) = B_0 \cos(\omega t) \left(1 - 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= -\frac{B_0}{2} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Sa composante en y vaut quant à elle

$$\begin{aligned} B_y(O) &= B_0 \left[0 - \frac{1}{2} \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) + \frac{1}{2} \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \right] \\ &= \frac{B_0}{2} \left[-\cos \omega t \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \omega t \sin \frac{2\pi}{3} + \cos \omega t \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \omega t \sin \frac{2\pi}{3} \right] \\ &= \frac{B_0}{2} \sin(\omega t) \left[2 \sin \frac{2\pi}{3} \right] \\ &= \frac{B_0}{2} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Au final

$$\boxed{\vec{B}(O) = \frac{B_0}{2} (-\cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y)}$$

On reconnait bien l'expression d'un champ tournant d'amplitude $B = \frac{B_0}{2}$.

- Appliquons le théorème du moment cinétique au rotor dans le référentiel du stator. Lorsque le moteur tourne à vide, il n'est soumis qu'au couple magnétique $\vec{\mathcal{M}}$. Soit

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

Comme on s'intéresse au régime permanent,

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{m} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

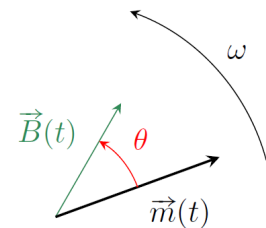
On en déduit que \vec{m} et \vec{B} sont colinéaires et donc $\theta = 0$.

- Toujours en régime permanent, le couple moteur et le moment résistant se compensent vectoriellement,

$$\vec{m} \wedge \vec{B} + \vec{\mathcal{M}}_r = \vec{0}$$

donc en norme

$$mB \sin \theta = \mathcal{M}_r \quad \text{soit} \quad \boxed{\theta = \arcsin \left(\frac{\mathcal{M}_r}{mB} \right)} = 24^\circ$$



L'angle θ est bien positif, d'une part car il est défini de \vec{m} vers \vec{B} , et d'autre part car le couple résistant a forcément pour effet de retarder le rotor par rapport au champ. De façon générale, lorsque le moteur entraîne une charge, le moment magnétique suit le champ mais avec un angle interne d'autant plus grand que le couple résistant est important. La puissance fournie par le moteur vaut

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}_r \omega \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{P} = mB\omega \sin \theta} = 205 \text{ W}$$

Cette puissance provient du générateur électrique qui alimente les bobines produisant le champ tournant.

4. La question précédente montre que $mB \sin \theta = \mathcal{M}_r$, c'est-à-dire que la charge mécanique entraînée (décrite par le moment \mathcal{M}_r) n'a d'influence que sur l'angle interne θ mais pas sur la vitesse de rotation. C'est d'ailleurs un des avantages de la machine synchrone par rapport à la machine asynchrone. Le couple maximal que peut fournir le moteur est obtenu pour $\sin \theta = 1$, soit

$$\boxed{\mathcal{M}_{max} = mB} = 1,6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Au delà, le couple exercé par le champ sur le rotor est trop faible pour le mettre en mouvement.

IV - Moteur asynchrone

1. Supposons la spire initialement immobile. Du fait de la rotation du champ tournant, le flux magnétique au travers de la spire varie. Il y a donc un phénomène d'induction, qui génère un courant dans la spire. Ce courant a pour conséquence l'apparition d'un moment magnétique qui tend à s'aligner avec le champ. Comme le champ tourne, la spire tourne également. On peut donner une vision équivalente à partir de la loi de Lenz : l'effet du courant induit est de diminuer les variations de flux magnétique au travers de la spire, et donc de chercher à donner à la spire une orientation constante par rapport au champ \vec{B} . Comme le champ tourne, la spire tourne également.

Les deux vitesses de rotation ne peuvent pas être égales. Si tel était le cas, en se plaçant dans le référentiel de la spire, le champ magnétique serait fixe et de norme constante, et il ne pourrait donc plus y avoir d'induction. La spire ralentirait alors en raison des frottements ... ce qui impliquerait de nouveau un phénomène d'induction.

2. À l'instant t , \vec{n} forme avec \vec{e}_z un angle ωt et \vec{B} un angle $\omega' t$. L'angle θ vaut donc

$$\theta(t) = \omega' t - \omega t = \Omega t$$

La vitesse de glissement Ω est la vitesse angulaire à laquelle \vec{n} et \vec{B} se décalent l'un par rapport à l'autre.

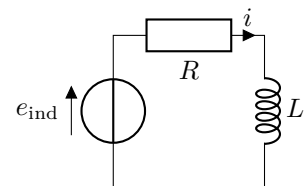
3. Le circuit électrique équivalent est donné ci-contre. Il n'y a pas de couplage inductif à prendre en compte. Le sens de i et de e doit être le même pour pouvoir appliquer la loi de Faraday.

Le flux magnétique à travers la spire à l'instant t est égal à

$$\phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{S} = SB \cos \theta = SB \cos \Omega t$$

On en déduit la f.é.m. induite par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = SB\dot{\theta} \sin \theta \quad \text{soit} \quad e = SB\Omega \sin \Omega t$$



L'équation électrique s'obtient en appliquant la loi des mailles $e = Ri + L \frac{di}{dt}$ soit

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{SB}{L}\Omega \sin \Omega t}$$

4. L'équation différentielle décrit un circuit en forçage harmonique de pulsation Ω . La pulsation du courant dans la bobine en régime permanent est donc Ω .

Passer l'équation différentielle en représentation complexe pose une difficulté à cause du terme de droite. En représentation complexe $\cos \Omega t \rightarrow e^{j\Omega t}$ et donc $\sin \Omega t = \cos(\Omega t - \frac{\pi}{2}) \rightarrow e^{j(\Omega t - \frac{\pi}{2})} = -j e^{j\Omega t}$.

L'équation différentielle devient donc

$$j\Omega \underline{i} + \frac{R}{L} \underline{i} = -j \frac{SB}{L} \Omega e^{j\Omega t}$$

soit

$$\underline{i} = -j \frac{SB\Omega}{R + jL\Omega} e^{j\Omega t} = -\frac{SB\Omega}{R^2 + L^2\Omega^2} (L\Omega + jR) e^{j\Omega t}$$

On peut alors revenir au signal réel $i(t) = \text{Re}(\underline{i})$ soit

$$i(t) = -\frac{\Omega SB}{R^2 + L^2\Omega^2} (L\Omega \cos \Omega t - R \sin \Omega t)$$

5. Le moment magnétique \vec{m} de la spire est donné par $\text{vecm}(t) = i(t) \vec{S}(t)$. Le couple magnétique auquel elle est soumise, par rapport à l'axe de rotation (Ox), est $\Gamma(t) = (\vec{m}(t) \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_x = (mB \sin \theta \vec{e}_x) \cdot \vec{e}_x = SBi(t) \sin \Omega t$ soit

$$\Gamma(t) = -\frac{\Omega S^2 B^2}{R^2 + L^2\Omega^2} (L\Omega \cos \Omega t - R \sin \Omega t) \sin \Omega t$$

Comme $\langle \cos \Omega t \sin \Omega t \rangle = 0$ et $\langle \sin^2 \Omega t \rangle = \frac{1}{2}$, on en déduit l'expression du couple moyen s'exerçant sur la spire :

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{R\Omega S^2 B^2}{2(R^2 + L^2\Omega^2)}$$

6. Lorsque la vitesse de rotation est nulle, $\omega = 0$ et $\Omega = \omega'$. Le couple moyen exercé sur le rotor est donc non-nul : le moteur asynchrone est donc en mesure de démarrer seul.
7. En régime permanent, le couple moteur moyen $\langle \Gamma \rangle$ doit compenser le couple résistant. Le point de fonctionnement du moteur asynchrone correspond donc à la (aux) vitesse(s) de rotation ω telle(s) que $\langle \Gamma \rangle = \Gamma_r$. Les deux cas sont représentés ci-dessous : le(s) point(s) de fonctionnement sont situés aux intersections des courbes. Dans le premier cas ($\langle \Gamma \rangle = \Gamma_1$), un seul point de fonctionnement est possible, et la charge est entraînée à une vitesse de rotation ω légèrement inférieure à ω' . Dans le second cas ($\langle \Gamma \rangle = \Gamma_2$), deux points de fonctionnement sont envisageables. Celui à plus basse vitesse de rotation est instable : si le couple résistant augmente par exemple sous l'effet d'une perturbation, alors d'après la loi du moment cinétique la vitesse de rotation du moteur diminue ... mais dans ce cas le couple moteur moyen diminue aussi. Le moteur ne peut donc plus entraîner la charge et décroche. Au contraire, pour le point de fonctionnement à plus haute vitesse de rotation, le couple moteur augmente si ω diminue, ce qui permet de compenser la perturbation.

