Correction OS – TD 10

Propagation d'un signal et interférences

I - Valeurs moyenne et efficace

I.1 - Signal créneau avec offset

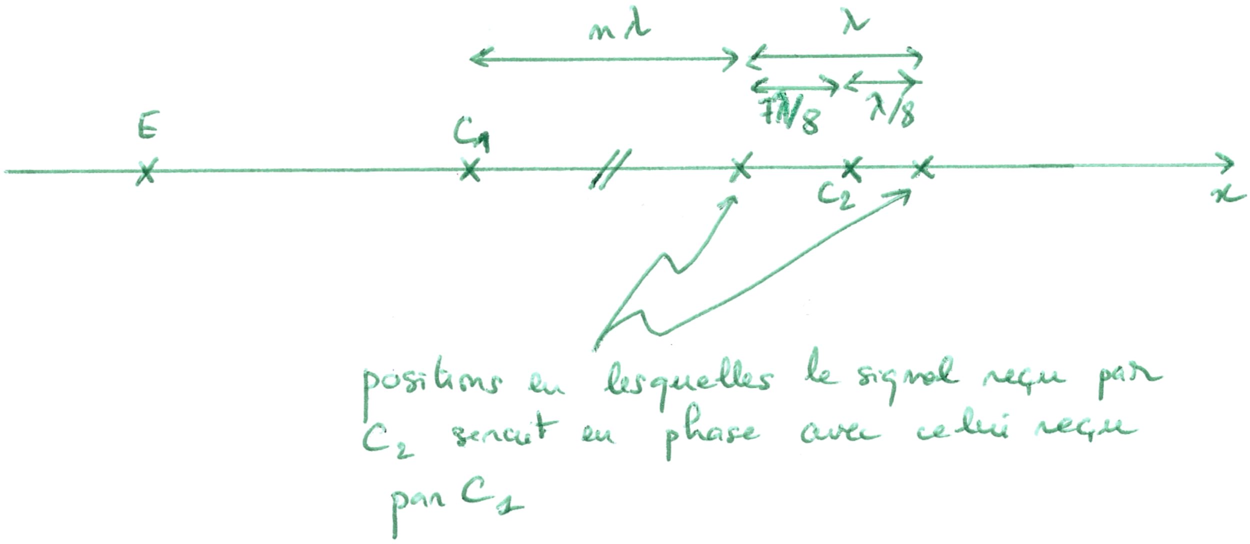
1. $\boxed{< c >= \frac{c_m}{2}}$.
2. $\boxed{C_{eff} = \frac{c_m}{\sqrt{2}}}$.

I.2 - Signal sinusoïdal

1. $\boxed{< s_1 >= s_0}$. $\boxed{S_{1,eff} = s_0}$.
2. $\boxed{< s_2 >= 0}$. $\boxed{S_{2,eff} = \frac{s_m}{\sqrt{2}}}$.
3. $\boxed{< s >= s_0}$. $\boxed{S_{eff} = \sqrt{s_0^2 + \frac{s_m^2}{2}}}$ ou $\boxed{S_{eff}^2 = s_0^2 + \frac{s_m^2}{2}}$.
4. La valeur moyenne d'une somme de signaux est la somme des valeurs moyennes des signaux.
Le carré de la valeur efficace d'une somme de signaux est la somme des carrés des valeurs efficaces des signaux. On dit que les valeurs efficaces ont une loi d'additivité quadratique.

II - Déphasage et retard temporel

1. Oui, puisqu'ils ont la même période donc la même fréquence.
2. Le signal 2 est en avance sur le signal 1. En effet, si on prend deux états de vibrations identiques sur chacun des signaux dans un intervalle de temps inférieur à $\frac{T}{2}$, alors à partir des états de vibration, c'est le signal 2 qui coupe l'axe des abscisses en première. On lit sur l'axe $\boxed{\Delta t = 2{,}5\,\mathrm{ms}}$.
3. On lit sur le graphique $2,5T = 50\,\mathrm{ms}$, d'où $\boxed{f = \frac{1}{T}} = \frac{2{,}5}{50\,\mathrm{ms}} = 50\,\mathrm{Hz}$.
4. Dans l'air à la température ambiante, on prend souvent une vitesse de phase $c = 3{,}4 \cdot 10^2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. D'où $\boxed{\lambda = \frac{c}{f}} = \frac{3{,}4\cdot 10^2\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{50\,\mathrm{Hz}} = 6{,}8\,\mathrm{m}$.
5. Si on définit $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ alors on a $\boxed{|\Delta\varphi| = 2\pi f \Delta t \quad \text{et} \quad \Delta\varphi < 0}$ car le signal 1 est en retard sur le signal 2. D'où $\Delta\varphi = -2\pi f \Delta t = -6{,}28\,\mathrm{rad} \times 50\,\mathrm{Hz} \times 2{,}5\,\mathrm{ms} = -0{,}79\,\mathrm{rad}$. Si on remarque que $\Delta t = \frac{T}{8}$ alors, on a même une valeur exacte $\Delta\varphi = -2\pi\frac{\Delta t}{T} = -\frac{2\pi}{8} = -\frac{\pi}{4}$ rad.
Si on définit $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ alors on a $\Delta\varphi = +\frac{\pi}{4}$ rad.
6. Les signaux reçus par C_1 et C_2 seraient en phase si la distance entre C_1 et C_2 était égale à un nombre entier de fois la longueur d'onde.
Or les deux signaux sont décalés temporellement de $\Delta t = \frac{T}{8}$, c'est-à-dire un huitième de période temporelle ; ils sont donc décalés spatialement d'un huitième de période spatiale (=longueur d'onde) donc de $\Delta x = \frac{\lambda}{8}$.
Le signal 2 étant en avance sur le signal 1, C_2 est dans une position $\frac{\lambda}{8}$ plus proche de l'émetteur qu'une position dans laquelle les signaux reçus par C_1 et C_2 seraient en phase.



Il faut donc éloigner C_2 de l'émetteur (et donc de C_1) d'une distance $\Delta x = \frac{\lambda}{8}$. On peut aussi le rapprocher de C_1 de $\frac{7\lambda}{8}$, mais c'est plus long.

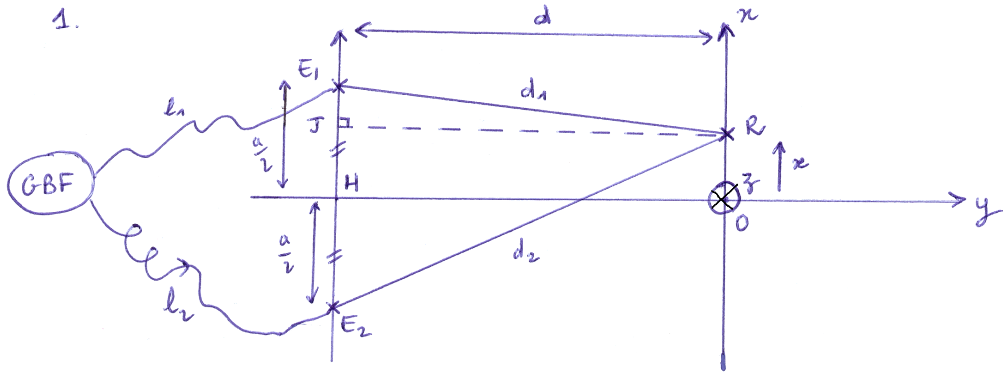
III - Signaux en quadrature

1. Cela signifie qu'ils sont déphasés d'un quart de période, donc que leur déphasage est $\frac{\pi}{2}$.
2. $\boxed{s_2(t) = s_{2m}\cos(\omega t \pm \frac{\pi}{2})}$.
3. On a $s_m = \sqrt{s_{1m}^2 + s_{2m}^2 + 2s_{1m}s_{2m}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$. (Attention : démonstration de cette relation exigible.)
   On a donc ici $\boxed{s_m = \sqrt{s_{1m}^2 + s_{2m}^2}}$
4. Si $s_{1m} = s_{2m}$ alors $\boxed{s_m = \sqrt{2}s_{1m}}$.
5. Si $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ alors $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ car l'expression $s_1(t) = s_m\cos(\omega t)$ suggère que $\varphi_1 = 0$. On a donc $s(t) = s_1(t) + s_2(t) = s_{1m}\cos(\omega t) + s_{2m}\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = s_{1m}\left(\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})\right) = 2s_{1m}\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{4})$.
   Finalement $\boxed{s(t) = \sqrt{2}s_{1m}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)}$.

IV - Décomposition harmonique

1. On lit la période du signal directement sur le graphique : $T = 2{,}2\,\text{ms}$. On en déduit la fréquence du fondamental : $f = \frac{1}{T} = 45 \cdot 10^1\,\text{Hz}$.
   La fréquence de l'harmonique de rang 2 est donc $f_2 = 2f = 91 \cdot 10^1\,\text{Hz}$ et de rang 3 : $f_3 = 3f = 1{,}4\,\text{kHz}$.
2. Le son créé par un instrument de musique, s'il est continu (note tenue et sans tenir compte de l'attaque du son) est périodique et son spectre est discret (fondamental + harmoniques de fréquences multiples de celle du fondamental). Un bruit qui contient toutes les fréquences possède un spectre continu.
   L'analyse de Fourier permet de décomposer le son d'un instrument en somme de sons harmoniques de fréquences présentes dans son spectre.
3. La mesure sur la figure 2a de 8 périodes de la courbe nous permet d'écrire $8T_0 = 18\,\text{ms}$, soit $\boxed{T_0 = 2{,}2\,\text{ms}}$ et donc $\boxed{f_0 = 0{,}44\,\text{kHz}}$.
   L'étude du spectre de la figure 2b nous donne un fondamental (fréquence la plus basse du spectre) à $\boxed{f_0 \approx 0{,}45\,\text{kHz}}$, ce qui est cohérent avec l'analyse de la courbe 2a.
4. Le spectre 2 contient deux pics (le fondamental et un harmonique) et correspond donc à un signal temporel proche d'une sinusoïde. Il s'agit donc de l'enregistrement (a), c'est à dire la flûte. Au contraire le spectre 1 contient de nombreux harmoniques et correspond à un signal temporel ne ressemblant pas du tout à un signal sinusoïdal : il s'agit de l'enregistrement (b) (harmonium).

V - Interférences en ondes ultrasonores



6. On a trouvé précédemment $s_m = \sqrt{s_{1m}^2 + s_{2m}^2 + 2s_{1m}s_{2m}\cos\left(\frac{\omega}{c}(d_2 - d_1)\right)}$

   Les interférences sont constructives pour s_m maximale, donc pour $\frac{\omega}{c}(d_2 - d_1) = k(d_2 - d_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) = 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$ donc pour $\boxed{d_2 - d_1 = p\lambda,\ p \in \mathbb{Z}}$

   Les interférences sont destructives pour s_m minimale, donc pour $\frac{\omega}{c}(d_2 - d_1) = k(d_2 - d_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) = (2p+1)\pi$, $p \in \mathbb{Z}$ donc pour $\boxed{d_2 - d_1 = \left(p + \frac{1}{2}\right)\lambda,\ p \in \mathbb{Z}}$

   On appelle p, « ordre d'interférences ».

7. Lorsque le récepteur est sur la médiatrice du segment $[E_1E_2]$, $d_2 = d_1$ et donc l'amplitude est localement maximale puisque les interférences sont constructives. D'autre part, sur cette médiatrice, le récepteur est dans la position qui lui permet d'être le plus proche possible des deux émetteurs à la fois, on s'attend donc à ce que l'amplitude résultante soit la plus grande de toutes les amplitudes observées. On lit sur la courbe que cela correspond à $X \approx 40\,\mathrm{cm}$. On définit donc $x = X - 40\,\mathrm{cm}$ de façon à avoir une abscisse $x = 0$ lorsque le récepteur est sur la médiatrice du segment $[E_1E_2]$ (récepteur en O sur le schéma).

8. Dans le triangle (E_1JR), rectangle en J, on a : $d_1^2 = \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + d^2$. Dans le triangle (E_2JR), rectangle en J, on a : $d_2^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + d^2$. On en déduit : $\boxed{d_2^2 - d_1^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = 2ax}$

9. L'énoncé suggère que $d_2^2 - d_1^2 \approx 2d(d_2 - d_1)$. Or, $d_2^2 - d_1^2 = 2ax$, donc

$$\boxed{d_2 - d_1 \approx \frac{2ax}{2d} = \frac{ax}{d}}$$

10. Soit p une valeur de l'ordre d'interférences telle que les interférences soient constructives, et x_p la position du capteur correspondante. On a, pour cet ordre d'interférence : $d_2 - d_1 = \frac{ax_p}{d} = p\lambda$ ou encore $x_p = p\frac{\lambda d}{a}$. La position du capteur la plus proche de x_p telle que les interférences y soient constructives est en $x_{p+1} = (p+1)\frac{\lambda d}{a}$. On appelle interfrange, la grandeur notée i telle que

$$\boxed{i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda d}{a}}$$

   A.N. : $i = \frac{\lambda d}{a} = \frac{cd}{fa} = \frac{3{,}4 \cdot 10^2\,\mathrm{m\,s^{-1}} \times 45 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{40 \cdot 10^3\,\mathrm{Hz} \times 12 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 3{,}2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = 3{,}2\,\mathrm{cm}$

11. On lit sur la figure $i \approx 3{,}6\,\mathrm{cm}$. Compte tenu des approximations mathématiques faites dans les calculs précédents, on conclut que l'ordre de grandeur est correct.