OS – Chapitre I Complément

Circuit linéaire du premier ordre

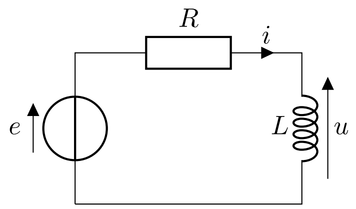
II - Réponse indicielle du circuit RL série

II.0 - Objectifs

L'idée de ce complément au cours est de réviser le cours en refaisant, pour un circuit RL série, la totalité de l'analyse qui a été menée pour la réponse indicielle du circuit RC série. Physiquement et mathématiquement, les problèmes à résoudre sont les mêmes. C'est la méthode générale qu'il faut avoir comprise.
Il y a surtout une différence de vocabulaire et de grandeurs étudiées. Ainsi, pour un circuit RC série, l'étude est centrée sur l'évolution de la charge du condensateur [1], alors que pour le circuit RL on étudie l'*établissement du courant*.
Les différences étapes de l'analyse sont proposées. À la fin du document, les réponses brutes sans justification sont données [2], mais toutes les réponses doivent pouvoir être justifiées rigoureusement en s'appuyant sur le cours.

II.1 - Position du problème

Soit le circuit suivant :



où $e(t)$ est un échelon de tension de hauteur E à $t = t_0$, c'est-à-dire :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t < t_0 \\ E & \text{pour} \quad t > t_0 \end{cases}$$

On considère que, à $t = t_0$, cela fait longtemps que $e(t) = 0$ et donc que, à $t = t_0^-$, on a $i(t_0^-) = 0$ (initialement le courant est nul dans le circuit).

II.2 - Mise en équation

- Déterminer, parmi i et u laquelle des deux grandeurs est continue temporellement.
- Mettre en équation le problème en déterminant l'équation différentielle vérifiée par la grandeur continue, de deux façons différentes :
  - par la loi des mailles ;
  - par une étude énergétique [3].
- En déduire l'expression du temps de relaxation τ et une forme normalisée de l'équation.

II.3 - Régime permanent et valeurs finales

- Déterminer le comportement asymptotique du circuit.
- En déduire le circuit équivalent limite pour $t \to +\infty$ puis les valeurs finales i_∞ et u_∞.

II.4 - Résolution analytique

- Résoudre analytiquement l'équation différentielle trouvée au II.2.
- Vérifier que la solution trouvée redonne les mêmes valeurs finales qu'au II.3 et est cohérente avec la condition initiale utilisée.

1. Ou l'évolution de sa tension, qui lui est proportionnelle.
2. Sauf pour le comportement asymptotique où une réponse complète rédigée est proposée.
3. Cf. Chapitre P.

II.5 - Chronogrammes

— Tracer l'allure des deux chronogrammes utiles (grandeur étudiée et dérivée temporelle de cette grandeur).

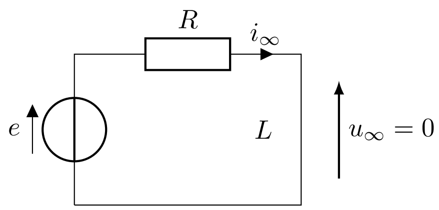
II - Réponse indicielle du circuit RL série

II.2 - Mise en équation

— i est la grandeur continue temporellement. À justifier.
— Par les deux méthodes, on trouve : $\forall t > t_0,\ \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{E}{L}$
— Par analyse dimensionnelle, on trouve : $\tau = \frac{L}{R}$ et donc aussi $\frac{E}{L} = \frac{1}{\tau}\frac{E}{R}$. Ce qui donne l'équation normalisée : $\forall t > t_0,\ \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i(t)}{\tau} = \frac{1}{\tau}\frac{E}{R}$.

II.3 - Régime permanent et valeurs finales

— Au bout d'une certaine durée, suffisamment longue pour que le régime transitoire soit considéré comme approximativement éteint, le circuit va atteindre un régime permanent. Ce régime permanent a la même forme d'évolution temporelle que la consigne. La consigne imposée au circuit étant stationnaire, le circuit va atteindre un régime permanent et stationnaire. On en déduit que le comportement asymptotique du circuit est stationnaire : $\forall t,\ \Delta t = t - t_0 \gg \tau,\ u(t) \approx$ cste et $i(t) \approx$ cste.
— On a $\forall t > t_0,\ u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Au bout d'une certaine durée, suffisamment longue pour que le régime transitoire soit considéré comme approximativement éteint, i est constante, donc u est nulle : le comportement aux limites de la bobine est celui d'un fil. Pour $t \to +\infty$, on obtient donc le circuit équivalent limite suivant :



Ce qui mène immédiatement à $i_\infty = \frac{E}{R}$.

II.4 - Résolution analytique

— $\forall t \geq t_0,\ i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}\right)$. La démonstration rigoureuse de la condition initiale en $t = t_0^+$, et donc de la prolongation de i en $t = t_0$ est exigible. On en déduit $\forall t > t_0,\ u(t) \equiv L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = E\, e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$.
— On retrouve bien :

$$i_\infty = \lim_{t\to+\infty} i(t) = \frac{E}{R} \quad \text{et} \quad u_\infty = \lim_{t\to+\infty} u(t) = 0 \quad \text{et} \quad i(t_0) = 0$$

II.5 - Chronogrammes (pour $E > 0$)