

Correction MI – TD 6

Mouvement d'un solide

I - Moments cinétiques

1. Les 5 points constituent un solide si leurs distances respectives restent constantes lors du mouvement. Soit $\forall(i, j) \overline{M_i M_j} = \text{cste}$. On peut d'ores et déjà voir que ce n'est pas le cas (par exemple les points M_2 et M_5 , ou $M_2 M_4$ se rapprochent l'un de l'autre). On peut aussi écrire que la condition précédente est équivalente à $\overline{M_i M_j}^2 = \overline{M_i M_j} \cdot \overline{M_i M_j} = \text{cste}$ soit $\overline{M_i M_j} \cdot \frac{d\overline{M_i M_j}}{dt} = \overline{M_i M_j} \cdot (\vec{v}_j - \vec{v}_i) = 0$.

Or $\overline{M_2 M_5} = -4\vec{e}_y$ et $\vec{v}_5 - \vec{v}_2 = \sqrt{2}(\vec{e}_x + \vec{e}_y) - (-1\vec{e}_y)$ soit $\overline{M_2 M_5} \cdot (\vec{v}_5 - \vec{v}_2) = -4(1 - \sqrt{2}) \neq 0$.

Les cinq points ne peuvent ainsi pas constituer un solide.

2. Le moment cinétique en O du point M_i est défini par $\vec{L}_{O,i} = \overline{OM_i} \wedge m\vec{v}_i$. Pour chaque point, le vecteur position et le vecteur vitesse sont contenus dans le plan (xOy) , le moment cinétique sera alors colinéaire au vecteur \vec{e}_z . En exprimant les distances en mètres, les vitesses en mètres par seconde, les masses en kilogramme, on obtient les moment cinétiques en $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$:

$$- \overline{OM_1} = \sqrt{3}\vec{e}_x + 1\vec{e}_y \text{ et } \vec{v}_1 = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_y\right) \text{ soit } \vec{L}_{O,1} = 0,1\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\vec{e}_z = \vec{0};$$

$$- \overline{OM_2} = 1\vec{e}_x + 2\vec{e}_y \text{ et } \vec{v}_2 = -1\vec{e}_y \text{ soit } \vec{L}_{O,2} = -0,1\vec{e}_z;$$

$$- \overline{OM_3} = -1,5\vec{e}_x + 2\vec{e}_y \text{ et } \vec{v}_3 = 2\left(\frac{1}{2}\vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y\right) \text{ soit } \vec{L}_{O,3} = 0,1(1,5\sqrt{3} - 2)\vec{e}_z;$$

$$- \overline{OM_4} = -3\vec{e}_x - 1\vec{e}_y \text{ et } \vec{v}_4 = 1\vec{e}_x \text{ soit } \vec{L}_{O,4} = 0,1\vec{e}_z;$$

$$- \overline{OM_5} = 1\vec{e}_x - 2\vec{e}_y \text{ et } \vec{v}_5 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y\right) \text{ soit } \vec{L}_{O,5} = 0,1(\sqrt{2} + 2\sqrt{2})\vec{e}_z = 0,3\sqrt{2}\vec{e}_z.$$

3. Les moments cinétiques étant parallèles à l'axe (Oz) , on a trivialement $\boxed{\forall i, L_{Ox,i} = L_{Oy,i} = 0}$.

4. Pour chacun des points, $L_{Oz,i} = \vec{L}_{O,i} \cdot \vec{e}_z$.

Soit $L_{Oz,1} = 0$, $L_{Oz,2} = -0,1$, $L_{Oz,3} = 0,1(1,5\sqrt{3} - 2) \simeq 0,060$, $L_{Oz,4} = 0,1$ et $L_{Oz,5} = 0,3\sqrt{2} \simeq 0,42$.

$L_{Oz,1}$ est nul, le vecteur vitesse de M_1 passe par l'axe (Oz) . $L_{Oz,2}$ est négatif, M_2 tourne dans le sens indirect autour de l'axe (Oz) . $L_{Oz,3}$, $L_{Oz,4}$ et $L_{Oz,5}$ sont positifs, M_3 , M_4 et M_5 tournent dans le sens direct autour de l'axe (Oz) .

II - Système en équilibre

1. Les forces qui s'exercent sur le point M sont son poids \vec{P} , la tension \vec{T}_1 exercée par la portion de fil OM et la tension \vec{T}_2 exercée par la portion de fil MA (voir schéma ci-contre).

Pour le poids, on a $\vec{P} = -m_1 g \vec{e}_y$ et $\overline{OM} = a(\cos\theta \vec{e}_x - \sin\theta \vec{e}_y)$. Par définition $\overline{\mathcal{M}_O}(\vec{P}) = \overline{OM} \wedge \vec{P}$ soit $\boxed{\overline{\mathcal{M}_O}(\vec{P}) = -m_1 g a \cos\theta \vec{e}_z}$.

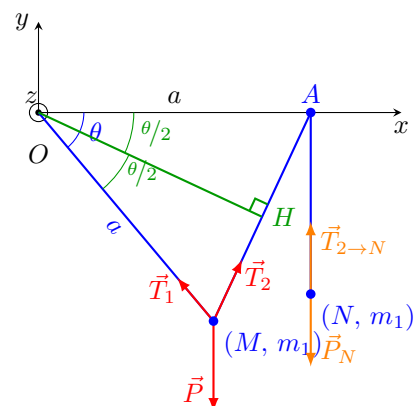
La tension \vec{T}_1 est colinéaire à (OM) , sa droite d'action passe donc par le point O et on en déduit directement

$$\boxed{\overline{\mathcal{M}_O}(\vec{T}_1) = \vec{0}}.$$

Pour la tension \vec{T}_2 , nous allons passer par le bras de levier : $\overline{\mathcal{M}_O}(\vec{T}_2) = \pm T_2 \cdot OH \vec{e}_z$

- le signe est donné par la règle de la main droite : \vec{T}_2 ayant tendance à faire tourner le point M dans le sens direct autour de (Oz) , on garde le signe +.

- La portion de fil $[MAN]$ étant supposée inextensible et sans masse, la tension T_2 se conserve en norme sur tout le brin, la force exercée par le fil sur le point N est donc $\vec{T}_{2 \rightarrow N} = T_2 \vec{e}_y$. La seule autre force s'exerçant sur N étant son poids, la condition d'équilibre de ce point donne alors $T_2 = m_2 g$.



- Le triangle AOM étant isocèle en O et OH étant la hauteur de ce triangle, on en déduit que le triangle OHA est rectangle en H avec $(\widehat{AOH}) = \frac{\theta}{2}$ et donc $OH = OA \cos \frac{\theta}{2} = a \cos \frac{\theta}{2}$.

Finalement $\boxed{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}_2) = m_2 g a \cos \frac{\theta}{2} \vec{e}_z}$.

2. À l'équilibre $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0}$. Soit, en appliquant le théorème du moment cinétique, $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}_1) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}_2) = \vec{0}$, soit $-m_1 g a \cos \theta_e \vec{e}_z + m_2 g a \cos \frac{\theta_e}{2} \vec{e}_z = \vec{0}$. On obtient $\boxed{m_1 \cos \theta_e = m_2 \cos \frac{\theta_e}{2}}$.

Selon les valeurs de m_1 et m_2 , la condition ci-dessus peut ne jamais être vérifiée. Nous allons la réécrire en utilisant la formule trigonométrique $\cos(2\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1$, ce qui donne $m_1 (2 \cos^2 \frac{\theta_e}{2} - 1) = m_2 \cos \frac{\theta_e}{2}$ soit, en posant $X = \cos \frac{\theta_e}{2}$,

$$2m_1 X^2 - m_2 X - m_1 = 0$$

On reconnaît une équation du second degré en X dont le discriminant est $\Delta = m_2^2 + 8m_1^2 > 0$. Il y a donc deux racines $X_{1,2} = \frac{m_2 \pm \sqrt{\Delta}}{4m_1}$. Comme θ_e est compris entre 0 et $\pi/2$, $\cos \frac{\theta_e}{2} \geq 0$, on ne garde alors que la racine positive, ce qui donne

$$\boxed{\cos \frac{\theta_e}{2} = \frac{m_2 + \sqrt{m_2^2 + 8m_1^2}}{4m_1}}$$

Cette solution ne peut exister que si le cosinus est inférieur ou égal à 1. Il faut donc $\frac{m_2 + \sqrt{m_2^2 + 8m_1^2}}{4m_1} \leq 1$ soit $m_2 + \sqrt{m_2^2 + 8m_1^2} \leq 4m_1$ ou $\sqrt{m_2^2 + 8m_1^2} \leq 4m_1 - m_2$ ou encore

$$m_2^2 + 8m_1^2 \leq (4m_1 - m_2)^2 = 16m_1^2 - 8m_1 m_2 + m_2^2$$

En simplifiant, on arrive à $8m_1^2 \geq 8m_1 m_2$.

Au final, la position d'équilibre existe à condition que $\boxed{m_1 \geq m_2}$.

III - Mouvement rotatif ou mouvement pendulaire

1. Au moment de l'incrustation ($t = 0$), les forces extérieures qui s'appliquent sur le système {tige+masse m } sont le poids \vec{P} et la réaction de l'axe \vec{R} . La liaison pivot étant supposée parfaite, on a $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{R}) = 0$. En $t = 0$, la tige est verticale, la droite d'action du poids passe donc par l'axe (Oz) et on en déduit également $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) = 0$. La somme des moments des forces par rapport à l'axe (Oz) étant nulle, on en déduit que le moment cinétique total par rapport à l'axe Oz se conserve au moment de l'incrustation.

En $t = 0^-$, la masse m arrive en A, animée d'une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ et la tige est immobile. On en déduit

$$\vec{L}_{Oz}(t = 0^-) = (\vec{OA} \wedge m\vec{v}_0) \cdot \vec{e}_z = ((-2\ell \vec{e}_y) \wedge mv_0 \vec{e}_x) \cdot \vec{e}_z = 2m\ell v_0$$

En $t = 0^+$, l'ensemble {tige+masse m } entame un mouvement de rotation autour de l'axe Oz . On a alors

$$\vec{L}_{Oz}(t = 0^+) = J_{Oz,tot} \omega_0 \text{ avec } J_{Oz,tot} = J_{Oz,tige} + J_{Oz,masse} = \frac{4M\ell^2}{3} + m(2\ell)^2 = 4\ell^2 \left(\frac{M}{3} + m\right).$$

La conservation du moment cinétique implique $\vec{L}_{Oz}(t = 0^-) = \vec{L}_{Oz}(t = 0^+)$ et donc

$$2m\ell v_0 = 4\ell^2 \left(\frac{M}{3} + m\right) \omega_0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{3mv_0}{2(M + 3m)\ell}}$$

2. La liaison pivot est parfaite, elle ne travaille pas. La seule autre force étant le poids, le système est conservatif avec $E_m = E_c + E_{p,p}$.

$$\text{En } t = 0, E_c(t = 0) = \frac{1}{2} J_{Oz,tot} \omega_0^2 = 2\ell^2 \left(\frac{M}{3} + m\right) \left(\frac{3mv_0}{2(M+3m)\ell}\right)^2 = \frac{3m^2 v_0^2}{2(M+3m)}.$$

L'énergie potentielle de pesanteur du système est la somme de l'énergie potentielle de la tige et de celle de la masse : $E_{p,p} = E_{p,tige} + E_{p,masse}$. La masse de la tige est M , son centre de gravité se situe au milieu de celle-ci donc à la distance ℓ de O . On a donc, en prenant le point O comme référence d'énergie potentielle, $E_{p,tige}(\theta) = -Mg\ell \cos \theta$. Pour la masse m , elle se situe au bout de la tige, donc à la distance 2ℓ de O , on en déduit de façon similaire $E_{p,masse}(\theta) = -2mg\ell \cos \theta$.

Au final, $E_{p,p}(\theta) = -(M + 2m)g\ell \cos \theta$ et donc $E_{p,p}(t = 0) = -(M + 2m)g\ell$.

On en déduit $E_m(t = 0) = \frac{3m^2 v_0^2}{2(M+3m)} - (M + 2m)g\ell$.

Lorsque l'angle est maximal et vaut θ_{max} , on a $E_c(\theta_{max}) = 0$ et $E_{p,p}(\theta_{max}) = -(M + 2m)gl \cos \theta_{max}$ soit $E_m(\theta_{max}) = -(M + 2m)gl \cos \theta_{max}$.

Le système étant conservatif, $E_m(t = 0) = E_m(\theta_{max})$ et donc

$$-(M + 2m)gl \cos \theta_{max} = \frac{3m^2 v_0^2}{2(M + 3m)} - (M + 2m)gl$$

soit

$$\cos \theta_{max} = 1 - \frac{3m^2 v_0^2}{2(M + 3m)((M + 2m)gl)}$$

3. Le mouvement est pendulaire si $\theta_{max} < \pi$ donc si $1 - \frac{3m^2 v_0^2}{2(M + 3m)(M + 2m)gl} > -1$ soit

$$\frac{3m^2 v_0^2}{2(M + 3m)(M + 2m)gl} < 2$$

On pose $v_{0,lim} = 2\sqrt{gl} \sqrt{\frac{2(M + 3m)(M + 2m)}{3m^2}}$ Si $v_0 < v_{0,lim}$, le mouvement est pendulaire et si $v_0 > v_{0,lim}$, le mouvement est rotatif.

IV - Énergétique d'un vélo

Une roue de vélo *en rotation* ne peut pas être modélisée par un point matériel. Il faut appliquer les théorèmes de la mécanique du solide en rotation autour d'un axe fixe. On étudie la roue dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

- On peut appliquer un théorème énergétique (ou en puissance) ou le théorème du moment cinétique. La méthode la plus rapide et la plus simple est un théorème énergétique. Le théorème du moment cinétique mène au même résultat mais nécessite une intégration supplémentaire (on redémontre en fait au passage le théorème de l'énergie cinétique...). Le couple au niveau de l'axe étant un couple de frottement, on a $C < 0$ pour $\dot{\theta} > 0$ et *vice versa*.

méthode A : Soit (Δ) l'axe de rotation de la roue et θ un angle orienté positivement autour de cet axe. On a :

$$\Delta E_c = \sum_{t_i \rightarrow t_f} W_{M_i \rightarrow M_f}(\vec{F}_{ext}) = \sum_{t_i}^{t_f} \int \mathcal{P}(\vec{F}_{ext}) dt = \sum_{t_i}^{t_f} \int \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) \dot{\theta} dt$$

Il y a trois actions extérieures :

- le poids qui s'applique au centre de masse de la roue situé sur l'axe et dont le moment par rapport à l'axe est donc nul ;
- la réaction normale de l'axe, qui empêche la roue de tomber, dont le support passe par l'axe et dont le moment par rapport à l'axe est donc nul ;
- les frottements au niveau de la liaison pivot dont le moment par rapport à l'axe est C .

On en déduit que :

$$\Delta E_c = \int_{t_i}^{t_f} C \dot{\theta} dt = \int_{\theta_i}^{\theta_f} C d\theta = C \int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta = C(\theta_f - \theta_i)$$

D'autre part, l'énergie cinétique de la roue en rotation pure autour de l'axe (Δ) est $E_c = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$. D'où :

$$\frac{1}{2} J \dot{\theta}_f^2 - \frac{1}{2} J \dot{\theta}_i^2 = C(\theta_f - \theta_i)$$

Initialement, on a $\dot{\theta}_i = \omega_0$ et au total la roue a fait N tours donc $(\theta_f - \theta_i) = +2\pi N$ si elle lancée avec $\omega_0 > 0$, $-2\pi N$ si elle est lancée avec $\omega_0 < 0$. Finalement :

$$C = -\frac{J\omega_0^2}{4\pi N} \quad (\text{pour } \omega_0 > 0)$$

méthode B : Soit (Δ) l'axe de rotation de la roue et θ un angle orienté positivement autour de cet axe. On a :

$$\forall t, \quad \frac{d\mathcal{L}_\Delta}{dt} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{ext})$$

Seul les frottements ont un moment non nul par rapport à l'axe et pour un solide en rotation pure autour de l'axe (Δ) fixe, $\mathcal{L}_\Delta = J\dot{\theta}$. On en déduit :

$$\forall t, \quad J\ddot{\theta} = C \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\forall t, \quad \ddot{\theta} = \frac{C}{J}} \quad (1.1)$$

La primitive de l'expression précédente est $\dot{\theta}(t) = \frac{C}{J}t + K$. Grâce à la condition initiale, on trouve :

$$\boxed{K = \omega_0 - \frac{C}{J}t_i} \quad \text{d'où} \quad \forall t, \quad \dot{\theta}(t) = \frac{C}{J}(t - t_i) + \omega_0.$$

En intégrant une fois (1.1) entre les instants initial et final et on trouve :

$$\boxed{\left[\dot{\theta} \right]_{\dot{\theta}_i = \omega_0}^{\dot{\theta}_f = 0} = \left[\frac{C}{J}t + K \right]_{t_i}^{t_f}} \quad \text{puis} \quad \dot{\theta}_f - \dot{\theta}_i = -\omega_0 = \frac{C}{J}(t_f - t_i) \quad \text{et enfin} \quad \boxed{t_f - t_i = -\frac{J\omega_0}{C}} \quad (1.2)$$

c'est-à-dire la durée de rotation de la roue pour une vitesse angulaire initiale donnée.

On vérifie que :

- plus l'inertie est grande, plus la roue met du temps s'arrêter ;
- plus la vitesse de rotation est grande en valeur absolue, plus la roue met du temps s'arrêter ;
- plus le moment du couple de frottement est grand en valeur absolue, moins la roue met de temps à s'arrêter.

On a donc $\forall t, \dot{\theta}(t) = \frac{C}{J}(t - t_i) + \omega_0$ ou encore $\forall t, \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{J}(t - t_i) + \omega_0$ ce qui mène par séparation des variables à

$$\forall t, \quad d\theta = \left(\frac{C}{J}(t - t_i) + \omega_0 \right) dt$$

On intègre entre l'initial et le final des deux côtés :

$$\int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{C}{J}(t - t_i) + \omega_0 \right) dt$$

À droite, on fait le changement de variable $u = t - t_i$, d'où $du = dt$ et on obtient :

$$\int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta = \int_{u(t_i)}^{u(t_f)} \left(\frac{C}{J}u + \omega_0 \right) du$$

$$\theta_f - \theta_i = \left[\frac{C}{2J}u^2 + \omega_0 u \right]_{u(t_i)}^{u(t_f)}$$

On a $u(t_f) = t_f - t_i$ et $u(t_i) = 0$ donc finalement :

$$\theta_f - \theta_i = \frac{C}{2J}(t_f - t_i)^2 + \omega_0(t_f - t_i)$$

Compte tenu de (1.2) et du fait que $(\theta_f - \theta_i) = +2\pi N$ si la roue est lancée avec $\omega_0 > 0$, on retrouve le même résultat qu'avec la méthode A.

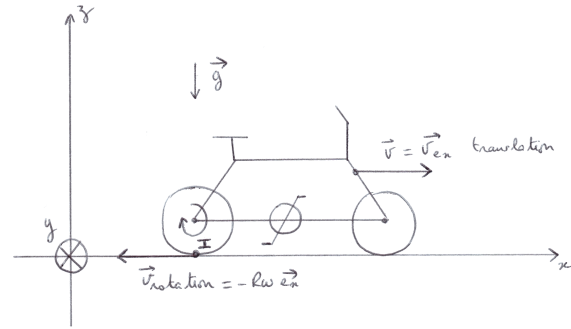
2. Pour $\omega_0 > 0$ et C constant, on a : $N = -\frac{J\omega_0^2}{4\pi C}$. Si C est constant, alors la courbe expérimentale $N = f(\omega_0^2)$ devrait être une droite. On trace cette courbe et sa droite de régression ; si la droite de régression passe par toutes les barres d'erreur, alors on peut conclure que « le modèle $C = cste$ est vérifié expérimentalement aux incertitudes de mesures près ».

Remarques :

- la pente de la droite est alors $-\frac{J}{4\pi C}$; si on connaît J , on en déduit une valeur expérimentale de C ;
 - on peut aussi tracer $N = f(\omega_0)$ mais il faut alors calculer la parabole de régression pour conclure.
3. (R_{cadre}) est en *translation rectiligne et uniforme* par rapport au référentiel terrestre. Donc, si le référentiel terrestre est supposé galiléen alors (R_{cadre}) l'est aussi.
 - 4.

Soit (R) le référentiel terrestre, $\vec{v} = v\vec{e}_x$ la vitesse de translation du cadre du vélo dans ce référentiel, ω la vitesse angulaire de rotation d'une roue autour de son axe et I le point géométrique de contact entre la roue et le sol. Il n'y a pas de glissement au sol donc, à chaque instant, la vitesse du point de la roue en contact avec le sol est la même que la vitesse du point du sol en contact avec la roue :

$$\vec{v}_{(I \in \text{roue})/R} = \vec{v}_{(I \in \text{sol})/R}$$



D'autre part :

- $\vec{v}_{(I \in \text{roue})/R} = \vec{v}_{\text{rotation}} + \vec{v}_{\text{translation}}$
et donc $\vec{v}_{(I \in \text{roue})/R} = -R\omega\vec{e}_x + v\vec{e}_x$
- $\vec{v}_{(I \in \text{sol})/R} = \vec{0}$.

On en déduit que $v = R\omega$ et $\boxed{\omega = \frac{v}{R}}$. A.N. : $\omega = 30 \text{ rad s}^{-1}$.

5. $\boxed{E_{C,roue} = \frac{1}{2}J\omega^2}$. A.N. : $E_{C,roue} = 73 \text{ J}$.

Remarque : la roue étant un cerceau, on a $J = mR^2$ et compte tenu de $v = R\omega$, on trouve $E_{C,roue} = \frac{1}{2}mv^2 \dots$

6. $E_{C,velo} = E_{C,rotation} + E_{C,translation} = 2E_{C,roue} + \frac{1}{2}m_{tot}v^2$ et finalement $\boxed{E_{C,velo} = 2 \times \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m_{tot}v^2}$.
 $E_{C,velo} = 4,1 \cdot 10^3 \text{ J}$.

7. La seule force qui travaille est la force de frottement \vec{f} des freins sur les roues. On a donc :

$$\Delta E_{C,velo} = \int_0^{t_f} \mathcal{P}(\vec{f}) dt$$

D'autre part :

- $\Delta E_{C,velo} = -E_{C,velo}$;

- et par définition de la valeur moyenne d'une grandeur : $\langle \mathcal{P}(\vec{f}) \rangle = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \mathcal{P}(\vec{f}) dt$.

On en déduit :

$$\boxed{\langle \mathcal{P}(\vec{f}) \rangle = -\frac{E_{C,velo}}{t_f}}$$

A.N. : $\langle \mathcal{P}(\vec{f}) \rangle = -8,2 \cdot 10^2 \text{ W}$.

V - Machine tournante

1. Les couples qui s'exercent sur la machine sont le couple moteur Γ_0 et le couple de frottement $-k\omega$. Le théorème du moment cinétique autour de l'axe Oz donne

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_0 - k\omega \quad \text{ou} \quad \frac{d\omega}{dt} + \frac{k}{J}\omega = \frac{\Gamma_0}{J}$$

On pose $\boxed{\tau = \frac{J}{k}}$, la solution de cette équation différentielle est alors $\omega(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\Gamma_0}{k}$. La machine est initialement à l'arrêt, on a donc $\omega(t=0) = 0$ soit $A = -\frac{\Gamma_0}{k}$.

En posant $\boxed{\omega_0 = \frac{\Gamma_0}{k}}$, on obtient $\boxed{\omega(t) = \omega_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$ et on a bien $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \omega_0$.

2. (a) On remplace Γ_0 par 0 dans l'équation précédente, la nouvelle équation du mouvement est alors $\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau} = 0$ dont la solution est $\omega(t) = B e^{-\frac{t}{\tau}}$.

En prenant comme nouvelle origine du temps, l'instant où la micro-coupe se produit, on a maintenant $\omega(t=0) = \omega_0$ et donc $\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

- (b) La condition donnée dans l'énoncé s'écrit $\omega(T) \geq 0,9\omega_0$ soit $\omega_0 e^{-\frac{T}{\tau}} \geq 0,9\omega_0$ ce qui donne $-\frac{T}{\tau} \geq \ln(0,9)$. Il faut donc $T \leq \tau \ln\left(\frac{10}{9}\right)$.

3. (a) Si on remplace Γ_0 par $\Gamma(t)$, l'équation du mouvement devient

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau} = \frac{\Gamma(t)}{J} = \frac{\Gamma_0}{J}(1 + \eta \cos \Omega t) = \frac{\omega_0}{\tau}(1 + \eta \cos \Omega t)$$

On pose alors $\omega(t) = \omega_0(1 + \varepsilon(t))$ et donc $\frac{d\omega}{dt} = \omega_0 \frac{d\varepsilon}{dt}$. L'équation précédente devient alors

$$\omega_0 \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\omega_0}{\tau}(1 + \varepsilon(t)) = \frac{\omega_0}{\tau}(1 + \eta \cos \Omega t)$$

qui donne

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\varepsilon}{\tau} = \frac{\eta}{\tau} \cos \Omega t$$

- (b) On reconnaît une équation différentielle avec un second membre sinusoïdal. L'équation homogène donne le régime transitoire $\varepsilon_h(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$ qui devient négligeable pour $t \gg \tau$. Une fois le régime sinusoïdal forcé atteint, la solution, qui correspond à la solution particulière de l'équation différentielle, est une fonction sinusoïdale de même pulsation que le forçage donc du type $\varepsilon(t) = \alpha \cos(\Omega t - \Psi)$. On a alors $\frac{d\varepsilon}{dt} = -\alpha \Omega \sin(\Omega t - \Psi)$ et l'équation différentielle se réécrit

$$-\alpha \Omega \sin(\Omega t - \Psi) + \frac{\alpha}{\tau} \cos(\Omega t - \Psi) = \frac{\eta}{\tau} \cos \Omega t$$

soit

$$-\alpha \Omega \tau (\cos \Psi \sin \Omega t - \sin \Psi \cos \Omega t) + \alpha (\cos \Psi \cos \Omega t + \sin \Psi \sin \Omega t) = \eta \cos \Omega t$$

En identifiant les termes en $\sin \Omega t$ et en $\cos \Omega t$ de part et d'autre de l'égalité, on trouve

$$\begin{cases} -\alpha \tau \Omega \cos \Psi + \alpha \sin \Psi = 0 \\ \alpha \tau \Omega \sin \Psi + \alpha \cos \Psi = \eta \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \tan \Psi = \Omega \tau \\ \alpha = \frac{\eta}{\Omega \tau \sin \Psi + \cos \Psi} = \frac{\eta}{(1 + (\Omega \tau)^2) \cos \Psi} \end{cases}$$

Or $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, on a donc $\alpha = \frac{\eta}{(1+(\Omega\tau)^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(\Omega\tau)^2}}}$

On trouve finalement $\Psi = \arctan(\Omega\tau)$ et $\alpha = \frac{\eta}{\sqrt{1+(\Omega\tau)^2}}$.

α est l'amplitude de la perturbation mécanique et Ψ est le déphasage entre la perturbation électrique et la perturbation mécanique.

- (c) Pour η fixé, si Ω augmente, α diminue : la machine est plus sensible aux perturbations basses fréquences.
4. Comme $\tau = \frac{J}{k}$, le fait d'adjoindre à la machine tournante un volant d'inertie aura pour effet d'augmenter J et donc τ . Cela a deux intérêts :
- comme vu à la question 2., la durée acceptable des micro-coupures est directement proportionnelle à τ , cela permet donc de limiter la diminution de la vitesse de rotation dans ce cas.
 - l'expression de α obtenue à la question précédente montre que l'amplitude de la perturbation diminue lorsque τ augmente : le volant d'inertie permet également de diminuer l'impact d'éventuelles perturbations électriques.

L'inconvénient évident est qu'en augmentant l'inertie de la machine, on augmente la durée du régime transitoire, le régime permanent mettra donc plus de temps à se mettre en place.

VI - Particule dans un cône

1. Comme nous avons des mouvements de rotation autour de l'axe (Oz), nous allons considérer le moment cinétique de la particule par rapport à cet axe. Soit $L_{Oz} = (\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{e}_z$, ce qui s'exprime en coordonnées cylindriques

$$L_{Oz} = (mr \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z)) \cdot \vec{e}_z = mr^2 \dot{\theta}$$

Les actions subies par le point M sont son poids, qui est vertical et donc colinéaire à l'axe (Oz), et la réaction du cône, perpendiculaire à la surface de celui-ci, et qui passe donc par l'axe (Oz) : le moment des actions subies par rapport à l'axe fixe (Oz) est nul, donc L_{Oz} est une constante du mouvement.

Cette constante est indiquée par les conditions initiales : $L_{Oz} = mr_0 v_0 = mz_0(\tan \alpha)v_0$. On voit donc que le signe de $\dot{\theta}$ ne change jamais : le point M contourne toujours l'axe (Oz) dans le même sens. De plus r ne peut pas s'annuler : le point M ne tombe pas au fond du cône (sauf si $L_{Oz} = 0$, soit $v_0 = 0$).

2. Le poids travaille et dérive de l'énergie potentielle $E_p = mgz$. La réaction du cône ne travaille pas. L'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + mgz$$

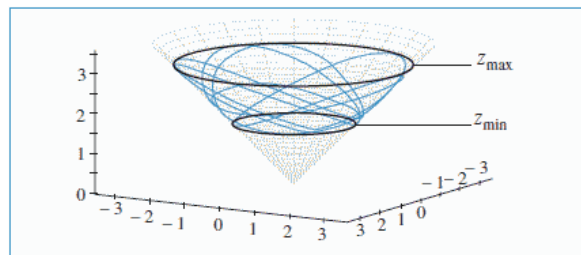
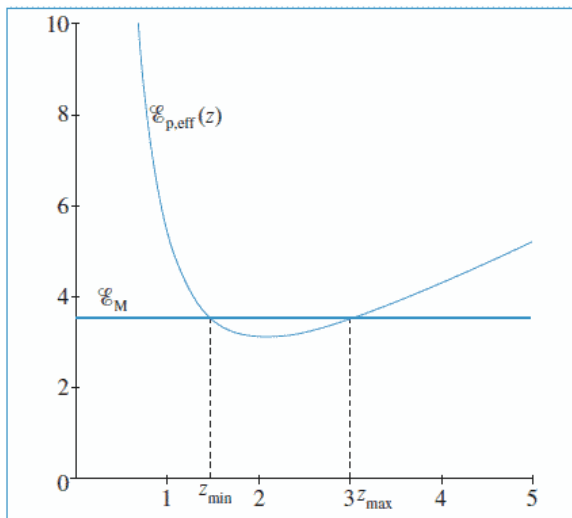
est donc aussi une constante du mouvement. En utilisant l'équation du cône $r = z \tan \alpha$ et l'expression de L_{Oz} trouvée précédemment, il vient :

$$E_m = \frac{1}{2}m(1 + \tan^2 \alpha)\dot{z}^2 + \frac{L_{Oz}^2}{2m \tan^2 \alpha} \frac{1}{z^2} + mgz = \text{cste}$$

Si on pose

$$E_{p,eff} = \frac{L_{Oz}^2}{2m \tan^2 \alpha} \frac{1}{z^2} + mgz$$

on voit que l'évolution de l'altitude z est contrainte par $E_m \geq E_{p,eff}$. Le graphe de cette énergie potentielle effective montrera que z évolue entre deux altitudes extrêmes z_{min} et z_{max} . Notons qu'avec les conditions initiales proposées, z_0 coïncide avec l'une de ces valeurs limites (car \vec{v}_0 est horizontale donc $\dot{z}(0) = 0$).



3. La trajectoire est circulaire si la valeur de l'énergie mécanique correspond juste au minimum de l'énergie potentielle effective, ce qui impose la relation : $\frac{dE_{p,eff}}{dz} = -\frac{L_{Oz}^2}{m \tan^2 \alpha} \frac{1}{z^3} + mg = 0$. En remplaçant L_{Oz} par $mz_0(\tan \alpha)v_0$, on trouve $-\frac{mv_0^2}{z_0} + mg = 0$ soit $\boxed{\frac{v_0^2}{z_0} = g}$.