MI – TD 5

Mouvements dans un champ de force centrale conservatif

I - Mouvements des planètes

La longueur du demi-grand axe de la trajectoire de Mars autour du Soleil est $a_{\text{Mars}} = 227\,944 \cdot 10^3$ km. Après avoir démontré, pour une trajectoire circulaire, la loi de Kepler utile et admis son extension aux trajectoires elliptiques, déduire des données sur la trajectoire de la Terre la période de révolution de Mars autour du Soleil.

Données pour la Terre : périhélie : $147 \cdot 10^6$ km ; aphélie : $152 \cdot 10^6$ km

II - Modèle classique de trou noir

En 1783, le physicien britannique John Michell eut pour la première fois l'idée de l'existence d'astres dont la gravitation serait si forte que même la lumière ne pourrait s'en échapper. L'idée fut reprise par Pierre-Simon Laplace en 1796, puis oubliée car elle semblait trop abstraite. Elle ressurgit en 1916 dans le cadre de la relativité générale lorsque Karl Schwarzschild vit apparaître un tel objet dans les solutions des équations d'Einstein. Ce concept fut développé par la suite, et la dénomination de trou noir s'est imposé dans les années 1960. On pense aujourd'hui en avoir détecté plus d'une centaine, mais comme rien ne peut s'échapper d'un trou noir la détection ne peut être qu'indirecte.

Cet exercice propose de calculer l'ordre de grandeur de la taille et de la densité d'un trou noir dans un modèle heuristique de physique newtonienne. Considérons pour cela un point matériel M de masse m à proximité d'un astre sphérique de masse m_0, de rayon R et de centre O. Cet astre est supposé suffisamment massif pour que l'on puisse considérer que M n'est soumis qu'à la force gravitationnelle due à l'astre. On étudie le mouvement de M dans le référentiel $\mathcal{R}$ astrocentrique, que l'on suppose galiléen.

1. Exprimer la force gravitationnelle ressentie par M ainsi que l'énergie potentielle dont elle dérive en la supposant nulle à l'infini. Exprimer l'énergie mécanique de M. Celle-ci se conserve-t-elle ?
2. Montrer que le mouvement de M est nécessairement plan. M étant alors repéré par ses coordonnées polaires, montrer que $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.
3. Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$ en introduisant l'énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}(r)$ dont on précisera l'expression en fonction de r.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de $E_{p,\text{eff}}(r)$. A l'aide d'un raisonnement graphique, déterminer pour quelles valeurs de E_m le point M peut échapper à l'attraction de l'astre, c'est-à-dire se trouver dans un état de diffusion.
5. En déduire la vitesse de libération v_{lib} à la surface de cet astre.
6. Dans la conception classique de Michell, un trou noir est un astre dont la vitesse de libération est supérieure à $c = 3.10^8$ m/s. Calculer le rayon de Schwarzschild R_S de l'astre, c'est-à-dire le rayon maximal qu'il doit avoir pour être un trou noir.
7. Calculer numériquement R_S pour le Soleil ($M_S = 2,0.10^{30}$ kg) et pour la Terre ($M_T = 6,0.10^{24}$ kg). En déduire la densité minimale d'un trou de noir de cette masse.
8. Quelles sont les deux contradictions internes à cette approche ?

Notons toutefois que malgré les deux limites évoquées, le rayon de Schwarzschild donne le bon ordre de grandeur de la taille d'un trou noir de masse m.

III - Lancement d'un satellite

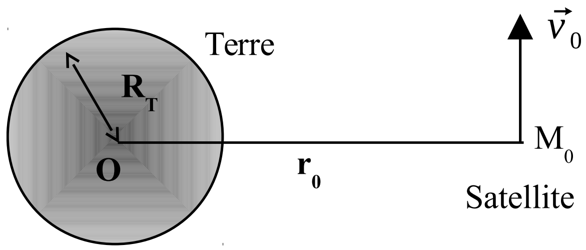


FIGURE 1.1 – $R_T = 6{,}37 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$; $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$.

III.1 - Étude préliminaire

On s'intéresse au lancement d'un satellite M de masse m. Ce satellite est lancé à $t = 0$ en un point M_0 de l'espace, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ par rapport au référentiel géocentrique (considéré comme galiléen dans ce problème). Voir la figure 1.1. On remarquera que $\vec{v}_0 \perp \overrightarrow{OM}_0$.
Après une poussée très brève à $t < 0$, on coupe les moteurs à $t = 0$ et le satellite est alors soumis à la seule force d'attraction gravitationnelle de la Terre.
On se place tout d'abord en coordonnées sphériques : $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

1. Donner l'expression de la force à laquelle est soumis M. On pourra poser $GM_Tm = \alpha$.
2. Démontrer que le travail de cette force ne dépend pas du chemin suivi en déterminant l'expression en fonction de r de l'énergie potentielle associée E_p. On prend comme convention : $E_p \to 0$ quand $r \to \infty$.
3. Montrer que le moment cinétique en O du point M, $\vec{L}_O$, se conserve au cours du mouvement et en déduire que le mouvement sera nécessairement plan.

On choisit alors de travailler en coordonnées polaires dans le plan de la trajectoire : $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ en considérant que $\vec{L}_O$ est porté par $\vec{e}_z$. On aura alors $\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho$. Voir figure 1.2.

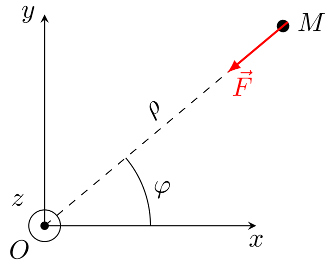


FIGURE 1.2 – Nouveau système de coordonnées.

4. Donner l'expression de $\vec{L}_O$ dans ce système de coordonnées. En déduire l'expression de la vitesse du satellite en fonction de ρ, m, $\dot{\rho}$, $\|\vec{L}_O\|$ et des vecteurs unitaires adéquats.
5. En déduire l'expression de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie mécanique E_m du point M en fonction de ρ, m, $\dot{\rho}$, $\|\vec{L}_O\|$ et α. En déduire l'expression de la fonction énergie potentielle effective $E_{p,eff}$ telle que : $E_m = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + E_{p,eff}$.
6. Effectuer une étude de la fonction $E_{p,eff}(\rho)$: limites, position ρ^* du minimum. Tracer un graphe.

III.2 - Calculs de vitesses

On considère que le satellite est lancé tel que décrit précédemment.

1. Quelle vitesse v_e faut-il communiquer au satellite afin qu'il échappe au champ de gravitation terrestre (vitesse minimale à ρ_0 donné) ? Déterminer l'expression de v_e en fonction de G, M_T et ρ_0.
2. Application numérique : calculer v_e si $\rho_0 = 20{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$ (unité demandée : $\mathrm{km\,s^{-1}}$).

3. Quelle vitesse $v_0 = v_c$ faut-il communiquer au satellite afin que sa trajectoire soit circulaire ? On donnera v_c en fonction de G, M_T et ρ_0.
4. Application numérique : calculer v_c si $\rho_0 = 20{,}0 \cdot 10^3$ km (unité demandée : km s^{-1}).
5. Montrer qu'une trajectoire circulaire est forcément une trajectoire circulaire et uniforme.
6. Calculer la période de rotation d'un satellite (exprimée en heures) si la trajectoire est circulaire et qu'on a $\rho_0 = 20{,}0 \cdot 10^3$ km.

III.3 - Conditions de lancement d'un satellite

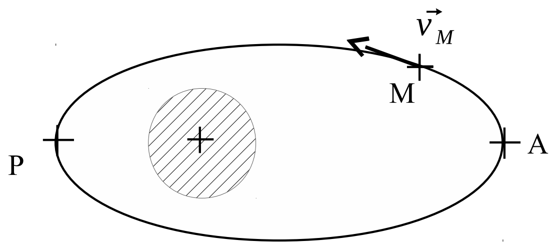


Figure 1.3 – Trajectoire elliptique.

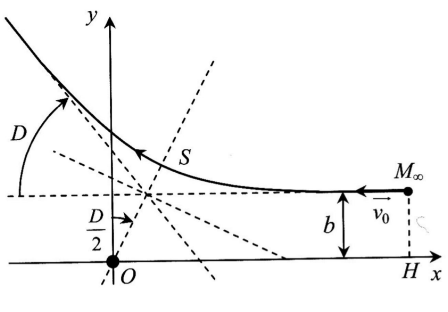
On considère toujours le même type de lancement.
On peut montrer que pour que le satellite reste sur une orbite autour de la Terre, il faut que la vitesse initiale en M_0, c'est-à-dire v_0, soit bornée.
Il est clair que la borne supérieure est $v_{0,sup} = v_e$ (vitesse au delà de laquelle le satellite échappe à l'attraction terrestre).
Nous allons maintenant déterminer la borne inférieure, $v_{0,min}$.

1. Montrer que si la trajectoire est elliptique (voir figure 1.3), les vitesses à l'apogée (A) et au périgée (P) sont nécessairement perpendiculaires au vecteur position :
$$\overrightarrow{OA} \perp \vec{v}_A \text{ et } \overrightarrow{OP} \perp \vec{v}_P$$
2. Démontrer que cela implique que nous ayons la relation : $\rho_A v_A = \rho_P v_P$ avec $\rho_A = \|\overrightarrow{OA}\|$ et $\rho_P = \|\overrightarrow{OP}\|$.
3. En utilisant la relation précédente et la conservation de l'énergie mécanique, déterminer l'expression de la borne inférieure de v_0 (notée $v_{0,min}$) en fonction de G, M_T, ρ_0 et R_T.
4. Application numérique : calculer $v_{0,min}$ si $\rho_0 = 20{,}0 \cdot 10^3$ km (unité demandée : km s^{-1}).

Remarque : on rappelle que le périgée et l'apogée sont les points pour lesquels la distance Terre-Satellite est extrémale (respectivement minimale et maximale). Dans le cas du Soleil, on parle de périhélie et d'aphélie.

IV - Expérience de Rutherford

Entre 1909 et 1911, E. Rutherford et ses deux étudiants H. Geiger et E. Marsden ont réalisé et interprété une expérience consistant à bombarder une mince feuille d'or avec des particules α, dont Rutherford avait précédemment montré qu'il s'agit de noyaux d'hélium. Ils observèrent que la plupart de ces particules traversaient la feuille sans être affectées, mais que certaines étaient déviées, parfois très fortement. En reliant les angles de déviation aux dimensions microscopiques, cela permit la découverte du noyau atomique et l'estimation de sa taille.



Modélisons l'expérience en considérant une particule α de masse m et de charge $2e$, venant de l'infini avec la vitesse $-v_0\vec{e}x$ et s'approchant avec un paramètre d'impact b d'un unique noyau cible de numéro atomique Z. Le paramètre d'impact est la distance minimale entre le prolongement de la trajectoire rectiligne de la particule et le noyau situé en O.
Le noyau reste pratiquement immobile dans le référentiel terrestre : on travaille dans ce référentiel supposé galiléen, le repère étant situé sur la position O du noyau. La trajectoire suivie par la particule α est la branche d'hyperbole représentée ci-contre.

Données : $\varepsilon_0 = 8,9.10^{-12}$ F/m ; $e = 1,6.10^{-19}$ C ; $m = 6,6.10^{-27}$ kg et $Z_{Au} = 79$.

1. Exprimer la force subie par la particule α sous la forme $\overrightarrow{F} = K/r^2\vec{e}_r$ et exprimer l'énergie potentielle d'interaction.
2. Montrer que l'énergie mécanique E_m de la particule α est une constante du mouvement et donner sa valeur à partir des conditions initiales.
3. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{\mathcal{L}}_O$ de la particule en O est un vecteur constant et donner la valeur de cette constante à l'aide des conditions initiales. La particule étant repérée par ses coordonnées polaires dans le plan (Oxy), montrer que $\overrightarrow{\mathcal{L}}_O$ s'exprime de manière simple en fonction de r et $\dot{\theta}$.
4. Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme $E_m = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_p^*(r)$, en explicitant la fonction $E_p^*(r)$. Comment l'appelle-ton ?
5. On note S la position de la particule α pour laquelle elle passe au plus près du noyau d'or, et on note $r_{min} = OS$ la distance minimale d'approche. Simplifier l'expression de E_m lorsque $r = r_{min}$. En déduire
$$r_{min} = \frac{K}{mv_0^2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{mbv_0^2}{K}\right)^2}\right)$$
6. On peut montrer que l'angle de déviation D de la particule est donné par $\tan\dfrac{D}{2} = \dfrac{K}{mbv_0^2}$.
Donner l'expression de b, puis de r_{min} en fonction de D, K et E_m.
7. Pour quelle valeur de b r_{min} est-elle minimale ? Que vaut alors la déviation D ?
8. Sachant que l'énergie cinétique d'une particule α est de l'ordre de 5 MeV, calculer b puis r_{min} pour $D_1 = 60°$ et $D_2 = 180°$ (particule renvoyée vers l'arrière). En déduire l'ordre de grandeur de la taille du noyau d'or.

V - Stabilité d'une trajectoire circulaire dans un champ de force central

Un point matériel de masse m évolue dans le champ de force centrale $F(r)\vec{e}_r$, de centre O.

1. Quelle relation lie le rayon r_0 et la vitesse v_0 dans le cas d'une trajectoire circulaire ?

L'objet subit une perturbation de vitesse, de sorte qu'à $t = 0$:
$$r(0) = r_0,\ v_\theta(0) = r\dot{\theta}(0) = v_0 \text{ et } v_r(0) = \dot{r}(0) = \alpha v_0, \text{ avec } \alpha \ll 1.$$

2. Donner l'expression de la constante aréolaire en fonction des conditions initiales.
3. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de $r(t)$.
4. Pour une petite perturbation au voisinage de r_0, établir un critère que doit vérifier le champ de force pour que l'évolution ultérieure se fasse au voisinage du cercle initial. Vous poserez $r(t) = r_0(1 + \varepsilon(t))$ avec $\varepsilon(t) \ll 1$.
5. Que devient cette condition pour un champ de force en $\frac{1}{r^n}$? Qu'en est-il pour le cas newtonien ?