Correction MI – TD 5

Mouvements dans un champ de force centrale conservatif

I - Mouvements des planètes

La relation utile est la troisième loi de Kepler. Cf cours MI-F pour la démonstration. Pour une planète en trajectoire circulaire autour du Soleil de rayon r et de période de révolution T, on a $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$ où M_S est la masse du Soleil. On admet que pour une trajectoire elliptique dont le demi grand-axe est a, on a $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$. Si on note a_T, T_T et a_M, T_M les demi grand-axes et périodes de révolution respectivement de la Terre et de Mars, on a donc : $\frac{T_T^2}{a_T^3} = \frac{T_M^2}{a_M^3}$. On en déduit :

$$\boxed{T_M = \sqrt{\frac{a_M^3}{a_T^3}}T_T}.$$

Le demi-grand axe est égal à la moyenne de l'aphélie et de la périhélie. Pour la Terre, on a donc $a_T = 1{,}50 \cdot 10^8$ km et on sait que $T_T = 365{,}25\,\text{jours} = 3{,}16 \cdot 10^7$ s d'où : $T_M = 59{,}1 \cdot 10^6$ s soit environ six cent quatre-vingts jours.

II - Modèle classique de trou noir

1. En coordonnées sphériques de centre O, on a

$$\boxed{\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r^2}\vec{e}_r}.$$

Le travail élementaire de cette force est $\delta W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ avec $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi$. Soit $\delta W = -\mathcal{G}m_0 m\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \mathcal{G}m_0 m\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right) = -\mathrm{d}E_p$ avec $E_p = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r} + K$. En choisissant $E_p(\infty) = K = 0$, on retrouve

$$\boxed{E_p = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r}}.$$

2. On applique le théorème du moment cinétique en O :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_O}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = (r\vec{e}_r) \wedge \left(-\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r^2}\vec{e}_r\right) = \vec{0}$$

Le moment cinétique étant stationnaire, on en déduit que le mouvement est plan, contenu dans le plan $(O, \overrightarrow{OM}_0, \vec{v}_0)$. On se place alors en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) colinéaire à $\overrightarrow{L}_O$, on a alors $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$, soit $\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = r\,\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z$.

Comme $\overrightarrow{L}_0$ est stationnaire, on en déduit que la quantité $C = r^2\dot{\theta}$ l'est aussi (loi des aires).

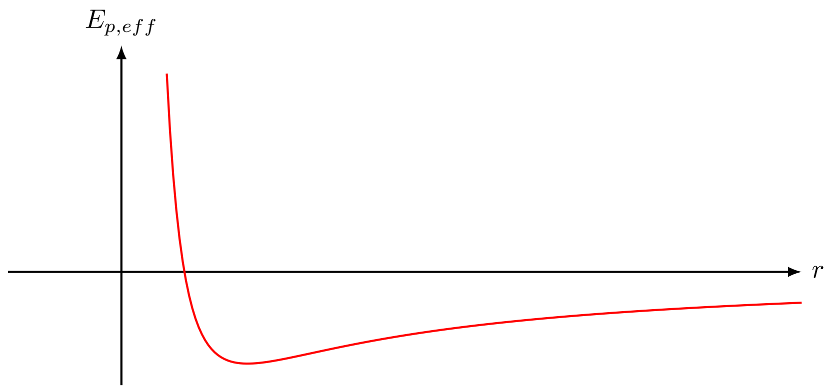
3. $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G}\frac{m_0 m}{r}$ avec $v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 = \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}$.
On peut donc écrire $E_m = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$ avec

$$\boxed{E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \mathcal{G}\frac{m_0 m}{r}}.$$

[1].

4. Pour $r \to 0^+$, le terme en $\frac{1}{r}$ prédomine et $E_{p,\text{eff}} \to +\infty$ et pour $r \to +\infty$, le terme en $\frac{1}{r^2}$ prédomine et $E_{p,\text{eff}} \to 0^-$. L'allure de l'énergie potentielle effective est donc :

1. Il faut se rappeler qu'il s'agit d'une « fausse » énergie potentielle, qui contient un terme issu de l'énergie cinétique. En particulier, la présence de la constante des aires C montre qu'elle dépend des conditions initiales.



Le point a une trajectoire non bornée, et est donc dans un état de diffusion, si $\boxed{E_m \geq 0}$

5. À la limite de l'état de diffusion, $E_m = 0$. À la surface de l'astre, on a alors $r = R$ et $v = v_{lib}$ soit $E_m = \frac{1}{2}mv_{lib}^2 - \mathcal{G}\frac{m_0 m}{R}$. On trouve finalement $\boxed{v_{lib} = \sqrt{\dfrac{2\mathcal{G}m_0}{R}}}$.
6. Par définition du rayon de Schwarzschild, $v_{lib} = c$ pour $R = R_S$. On en déduit que l'astre est un trou noir si
$$\boxed{R < R_S = \frac{2\mathcal{G}m_0}{c^2}}$$
7. A.N. : $R_{S,S} = 3{,}0\,\text{km}$ et $R_{S,T} = 9{,}0\,\text{mm}$. La masse volumique est donnée par $\rho = \frac{m_0}{V} = \frac{m_0}{\frac{4}{3}\pi R^3}$.
A.N. : $\rho_S = 7{,}7 \cdot 10^{19}\,\text{km/m}^3$ et $\rho_T = 8{,}5 \cdot 10^{30}\,\text{km/m}^3$
8. On a appliqué la force de gravitation à un photon, qui est une particule qui n'a pas de masse. On a également utilisé des résultats de la mécanique newtonienne à des vitesses égales à la vitesse de la lumière, qui ne peuvent se traiter rigoureusement qu'en utilisant la mécanique relativiste.

III - Lancement d'un satellite

III.1 - Étude préliminaire

1. On a $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ et $\boxed{\overrightarrow{F}(M) = -\dfrac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r}$
2. On a :
$\underset{M\to M_\infty}{W(\overrightarrow{F})} = \displaystyle\int_M^{M_\infty} \overrightarrow{F}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \int_r^\infty -\frac{\alpha}{r^2}\mathrm{d}r = -\frac{\alpha}{r}$
Soit la fonction de la position uniquement, $E_p(r) = -\frac{\alpha}{r} + E_{p,\infty}$. On constate que :
$$\underset{M\to M_\infty}{\Delta E_p} = (E_{p,\infty} - E_p(r)) = \frac{\alpha}{r} = -\underset{M\to M_\infty}{W(\overrightarrow{F})}$$
ce qui prouve que le travail ne dépend pas du chemin suivi.
3. Théorème du moment cinétique en O, appliqué à M, dans le référentiel géocentrique supposé galiléen :
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_O(M)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}(M) = (r\vec{e}_r) \wedge \left(-\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r\right) = \vec{0}$$
donc le moment cinétique $\overrightarrow{L}_O(M)$ est stationnaire. Étant donné que le moment cinétique est orthogonal en tout point à la fois au vecteur-position $\overrightarrow{OM}$ et au vecteur-vitesse $\vec{v}$, il est toujours orthogonal au plan $(\overrightarrow{OM}, \vec{v})$. La trajectoire est donc toujours localement contenue dans un plan orthogonal au moment cinétique et passant par O. Puisque le moment cinétique est stationnaire, on en déduit que ce plan est toujours le même et que la trajectoire est plane.
4. On a $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho$ et $\vec{v}_M = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ donc $\overrightarrow{L}_O = m\rho^2\dot{\varphi}\vec{e}_z$ et $\rho\dot{\varphi} = \frac{\|\overrightarrow{L}_O\|}{m\rho}$ puis $\boxed{\vec{v}_M = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \dfrac{\|\overrightarrow{L}_O\|}{m\rho}\vec{e}_\varphi}$.

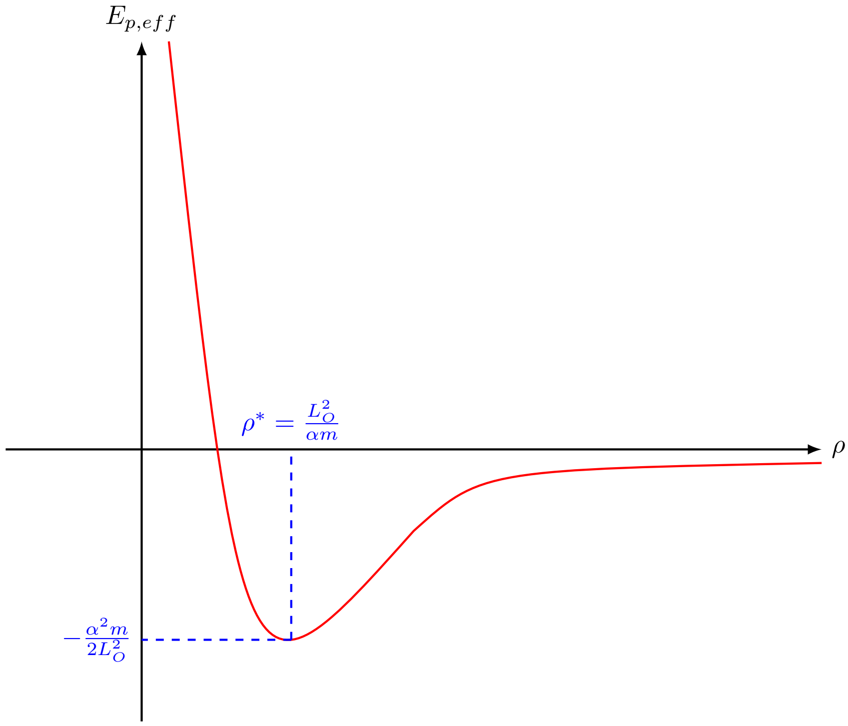
5. $E_c = \frac{1}{2}mv_M^2 = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\frac{\|\overrightarrow{L}_O\|^2}{m\rho^2}$ et $E_m = E_c + E_p = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2}_{E_c\text{ radiale}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\|\overrightarrow{L}_O\|^2}{m\rho^2}}_{E_c\text{ orthoradiale}} - \frac{\alpha}{\rho} + E_{p,\infty}$

   L'énergie potentielle effective est la partie de l'énergie mécanique qui correspond à la somme de l'énergie cinétique orthoradiale et de l'énergie potentielle. Cette énergie potentielle effective ne dépend que de ρ. On a donc :

$$\boxed{E_{p,\text{eff}} = \frac{1}{2}\frac{\|\overrightarrow{L}_O\|^2}{m\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho} + E_{p,\infty} = \frac{1}{2}\frac{\|\overrightarrow{L}_O\|^2}{m\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho}}$$

6. $\lim\limits_{\rho\to\infty} E_{p,eff} = E_{p,\infty} = 0\,;\ \lim\limits_{\rho\to 0} E_{p,\text{eff}} = +\infty\,;\ \frac{\mathrm{d}E_{p,\text{eff}}}{\mathrm{d}\rho} = \frac{\alpha}{\rho^2} - \frac{\|\overrightarrow{L}_O\|^2}{m\rho^3}$.
   En notant ρ^* le rayon pour lequel la dérivée de $E_{p,\text{eff}}$ est nulle, on a :

$$\left(\frac{\mathrm{d}E_{p,\text{eff}}}{\mathrm{d}\rho}\right)_{\rho=\rho^*} = 0 \implies \rho^* = \frac{\|\overrightarrow{L}_O\|^2}{\alpha m} \text{ et } E_{p,\text{eff}}(\rho^*) = E_{p,\text{eff,min}} = \frac{1}{2}\frac{\|\overrightarrow{L}_O\|^2}{m{\rho^*}^2} - \frac{\alpha}{\rho^*} = -\frac{\alpha^2 m}{2\|\overrightarrow{L}_O\|^2} < 0$$



III.2 - Calculs de vitesses

On considère que le satellite est lancé tel que décrit précédemment.

1. Étant donné que $E_{p,\infty} = 0$, le satellite échappe à la gravitation terrestre si $E_m \geq 0$. À la distance ρ_0, le cas limite est obtenu pour la vitesse v_e telle que $E_m = 0$ d'où :

$$0 = \frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{\alpha}{\rho_0}$$

   et

$$\boxed{v_e = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\rho_0}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{\rho_0}}}$$

2. Application numérique : $v_e = 633 \cdot 10^1\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 6{,}33\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.
3. Une démonstration utilisant la RFD a été faite en cours. On propose ici un raisonnement graphique utilisant la représentation de $E_{p,eff}(\rho)$.
   Étant donné que $E_m = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + E_{p,eff}$ et que $\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 \geq 0$, on peut affirmer que les trajectoires possibles sont contraintes par la condition $E_m \geq E_{p,eff}$. En traçant sur la courbe de $E_{p,eff}$ la valeur de E_m pour

une trajectoire donnée, on détermine ainsi les valeurs de rayon accessible à une trajectoire donnée. Pour une trajectoire circulaire, il n'existe qu'une seule valeur du rayon : cela correspond obligatoirement à une énergie mécanique égale à l'énergie potentielle effective minimale : $E_m = E_{p,eff,min} = -\frac{\alpha^2 m}{2\|\overrightarrow{L}_O\|^2}$.

D'autre part, pour une distance ρ_0 et une vitesse v_c, $E_m = \frac{1}{2}mv_c^2 - \frac{\alpha}{\rho_0}$. La condition $E_m = E_{p,eff,min}$ se réécrit donc :

$$\frac{1}{2}mv_c^2 - \frac{\alpha}{\rho_0} = -\frac{\alpha^2 m}{2\|\overrightarrow{L}_O\|^2}$$

Or, $\|\overrightarrow{L}_O\| = m\rho_0 v_c$ donc :

$$\frac{1}{2}mv_c^2 - \frac{\alpha}{\rho_0} = -\frac{\alpha^2}{2m\rho_0^2 v_c^2}$$

donc

$$v_c^4 - 2\frac{\alpha}{m\rho_0}v_c^2 + \frac{\alpha^2}{m^2\rho_0^2} = \left(v_c^2 - \frac{\alpha}{m\rho_0}\right)^2 = 0 \implies \boxed{v_c = \sqrt{\frac{\alpha}{m\rho_0}} = \sqrt{\frac{GM_T}{\rho_0}}}$$

4. Application numérique : $v_e = 447 \cdot 10^1\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 4{,}47\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.
5. Une démonstration utilisant la RFD a été faite en cours. On propose ici un raisonnement utilisant la loi des aires.
   Pour tout mouvement à force centrale et conservative, $\overrightarrow{L}_O(M)$ est stationnaire. Or $\overrightarrow{L}_O(M) = m\rho^2\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$. On en déduit que $\rho^2\dot{\varphi}$ est stationnaire (loi des aires). Pour une trajectoire circulaire on a, en plus, ρ stationnaire, donc $\dot{\varphi}$ stationnaire donc $\rho\dot{\varphi}$ stationnaire. Or $\|\vec{v}_M\| = |\rho\dot{\varphi}|$. Donc $\|\vec{v}_M\|$ est stationnaire. CQFD.
6. On exprime de deux façons le périmètre $\mathcal{P}$ du cercle décrit par le satellite quand il fait un tour complet en une durée T_c.
   — géométrie : $\mathcal{P} = 2\pi\rho_0$;
   — cinématique : $\mathcal{P} = \int_0^T v_c \mathrm{d}t$ et puisque v_c est stationnaire (vitesse uniforme) : $\mathcal{P} = v_c \int_0^T \mathrm{d}t = v_c T_c$.

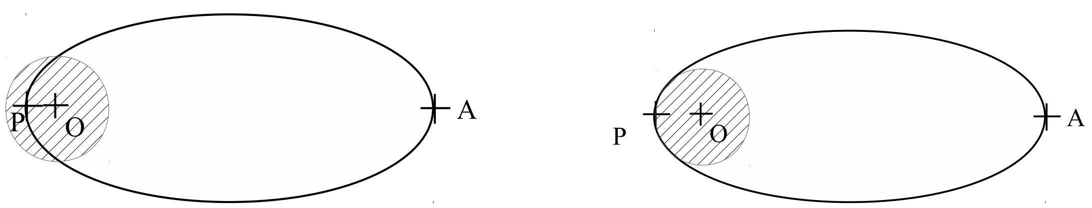
   On en déduit :

$$\boxed{T_c = \frac{2\pi\rho_0}{v_c} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_0^3}{GM_T}}}$$

   A.N. : $T_c = 28{,}1 \cdot 10^3\,\mathrm{s} = 7{,}80\,\mathrm{h}$

III.3 - Conditions de lancement d'un satellite

1. Partout, on peut écrire $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$. Or, en A et en P, le rayon est extrémal donc sa dérivée est nulle : $\dot{\rho} = 0$, d'où, en A et en P, $\vec{v} = \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$. Étant donné qu'en tout point $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho$ on a bien, en A et en P : $\overrightarrow{OA} \perp \vec{v}_A$ et $\overrightarrow{OP} \perp \vec{v}_P$
2. On a $\|\overrightarrow{L}_O(A)\| = \|m\overrightarrow{OA} \wedge \vec{v}_A\| = m\|\overrightarrow{OA}\|\|\vec{v}_A\|$ car $\overrightarrow{OA} \perp \vec{v}_A$. D'où $\|\overrightarrow{L}_O(A)\| = m\rho_A v_A$. De même : $\|\overrightarrow{L}_O(P)\| = m\rho_P v_P$. D'autre part, le moment cinétique est stationnaire donc $\|\overrightarrow{L}_O(A)\| = \|\overrightarrow{L}_O(P)\|$ et, finalement, $\boxed{\rho_A v_A = \rho_P v_P}$. CQFD.
3. La situation est la suivante : on lance le satellite à l'apogée A à la distance ρ_0 avec la vitesse v_0 et on cherche à déterminer la vitesse limite $v_{0,min}$ telle que le périgée est à une distance $\rho_P = R_T$. Si $v_0 < v_{0,min}$, $\rho_P < R_T$ et le satellite s'écrase sur Terre (figure de gauche ci-dessous). Pour $v_0 = v_{0,min}$, $\rho_P = R_T$ et le satellite frôle la surface de la Terre (figure de droite ci-dessous).



On a donc, en se plaçant dans le cas limite :

$$\begin{aligned}\rho_A &= \rho_0\\ v_A &= v_{0,min}\\ \rho_P &= R_T\\ \text{et toujours : } \rho_A v_A &= \rho_P v_P\end{aligned}$$

On en déduit : $v_P = \dfrac{\rho_0}{R_T} v_{0,min}$.

D'autre part, la conservation de l'énergie mécanique donne : $\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{\alpha}{\rho_A} = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{\alpha}{\rho_P}$ ce qui se traduit, dans le cas limite par

$$\frac{1}{2}mv_{0,min}^2 - \frac{\alpha}{\rho_0} = \frac{1}{2}m\left(\frac{\rho_0}{R_T}v_{0,min}\right)^2 - \frac{\alpha}{R_T}$$

ce qui mène à

$$\boxed{v_{0,min} = \sqrt{2GM_T\left(\frac{R_T - \rho_0}{R_T\rho_0}\right)\frac{1}{1-\left(\frac{\rho_0}{R_T}\right)^2}}}$$

4. $v_{0,min} = 311 \cdot 10^1\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 3{,}11\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

IV - Expérience de Rutherford

1. La particule α étant chargée positivement, elle subit une force de Coulomb répulsive exercée par le noyau situé en O s'écrivant
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_\alpha q_{noy}}{r^2}\,\vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2}\,\vec{e}_r$$
. On peut bien mettre cette force sous la forme $\vec{F} = \frac{K}{r^2}\,\vec{e}_r$ avec $\boxed{K = \dfrac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}}$.

2. On peut considérer que la particule α n'est soumise qu'à l'interaction coulombienne, qui est une force conservative, E_m est donc une constante du mouvement. Initialement, la particule est à l'infini, où $E_p = 0$ et est animée d'une vitesse v_0 d'où $\boxed{E_m = \dfrac{1}{2}mv_0^2}$.

3. La force coulombienne étant une force centrale centrée en O, sa droite d'action passe toujours par ce point. On en déduit que le moment de cette force par rapport à O est nul et donc, en appliquant le théorème du moment cinétique, que $\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_0}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$. Le moment cinétique par rapport à O est donc une constante du mouvement. Initialement $\vec{\mathcal{L}}_0(\infty) = \overrightarrow{OM}_\infty \wedge m\vec{v}_0 = m(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}_\infty) \wedge \vec{v}_0 = m(OH\,\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y) \wedge (-v_0\vec{e}_x)$ soit $\boxed{\vec{\mathcal{L}}_0 = mbv_0\,\vec{e}_z}$.

   En repérant la particule par ses coordonnées polaires, on a $\vec{\mathcal{L}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = r\,\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta)$ d'où $\boxed{\vec{\mathcal{L}}_O = mr^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z}$

4. L'énergie mécanique est donnée par
$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{K}{r}$$
   En utilisant le résultat de la question précédente, on peut remplacer $\dot{\theta}$ par $\frac{bv_0}{r^2}$, ce qui donne
$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_p^*(r) \quad \text{avec} \quad \boxed{E_p^*(r) = \frac{mb^2v_0^2}{2r^2} + \frac{K}{r}}$$
   Cette fonction est l'énergie potentielle effective de la particule α.

5. En S, sa distance par rapport à O est minimale, on a donc $\dot{r} = 0$. L'énergie mécanique est alors $E_m = E_p^*(r_{min}) = \frac{mb^2v_0^2}{2r_{min}^2} + \frac{K}{r_{min}}$.

L'énergie mécanique étant une constante du mouvement, on a $E_{m,\infty} = E_{m,r_{min}}$ soit

$$\frac{mb^2v_0^2}{2r_{min}^2} + \frac{K}{r_{min}} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

On multiplie cette équation par $\frac{2r_{min}^2}{mv_0^2}$, ce qui donne

$$r_{min}^2 - \frac{2K}{mv_0^2}r_{min} - b^2 = 0$$

Le discriminant est $\Delta = \left(\frac{2K}{mv_0^2}\right)^2 + 4b^2 > 0$, les deux racines sont alors

$$r_{\pm} = \frac{1}{2}\left(\frac{2K}{mv_0^2} \pm \sqrt{\left(\frac{2K}{mv_0^2}\right)^2 + 4b^2}\right)$$

r étant le rayon des coordonnées polaires, il est forcément positif. On ne garde donc que la racine positive et finalement

$$\boxed{r_{min} = \frac{K}{mv_0^2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{mbv_0^2}{K}\right)^2}\right)}$$

6. En inversant la relation donnée dans l'énoncé, on trouve

$$b = \frac{K}{mv_0^2 \tan\frac{D}{2}} = \frac{K}{2E_m \tan\frac{D}{2}}$$

puis

$$r_{min} = \frac{K}{2E_m}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{mbv_0^2}{K}\right)^2}\right) = \frac{K}{2E_m}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\tan\frac{D}{2}}\right)^2}\right)$$

Or $1 + \left(\frac{1}{\tan\frac{D}{2}}\right)^2 = 1 + \frac{\cos^2\frac{D}{2}}{\sin^2\frac{D}{2}} = \frac{\sin^2\frac{D}{2}+\cos^2\frac{D}{2}}{\sin^2\frac{D}{2}} = \frac{1}{\sin^2\frac{D}{2}}$

Comme $\sin\frac{D}{2} > 0$, on obtient finalement : $\boxed{r_{min} = \frac{K}{2E_m}\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{D}{2}}\right)}$ et alors $r_{min,min} = \frac{K}{E_m}$.

7. D'après la relation de la question 5., r_{min} est minimum lorsque $b = 0$, ce qui mène à $\tan\frac{D}{2} \to \infty$ et donc $D = 180\,°$.
8. On a $K = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0} = 3{,}62 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{m\,J^{-1}}$ et $E_m = E_{c,\infty} = 5\,\mathrm{MeV} = 8 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J}$
   — pour $D_1 = 60\,°$, on trouve $b_1 = 3{,}9 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}$ puis $r_{min,1} = 6{,}8 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}$;
   — pour $D_2 = 180\,°$, on trouve $b_2 = 0$ puis $r_{min,2} = r_{min,min} = 4{,}5 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}$;

   Si la particule peut arriver jusqu'en r_{min} avant de faire demi-tour, c'est que le noyau est un peu plus loin, donc plus petit que r_{min}.
   On en déduit qu'un noyau d'or a une taille de l'ordre de $10^{-14}\,\mathrm{m}$, ce qui est bien plus petit que la taille de l'atome ($10^{-10}\,\mathrm{m}$) connue par Rutherford.

V - Stabilité d'une trajectoire circulaire dans un champ de force central

1. On applique la RFD sur l'objet en mouvement : $m\vec{a} = \vec{F} = F(r)\vec{e}_r$. Le mouvement est plan, on se place en coordonnées polaires et pour le mouvement circulaire on a $\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. On en déduit $\ddot{\theta} = 0$ (le mouvement est uniforme) et $\boxed{m\dfrac{v_0^2}{r_0} = -F(r_0)}$.
2. La constante aréolaire est définie par $C = r^2\dot{\theta}$. Cette grandeur étant stationnaire $C = r^2(0)\dot{\theta}(0)$ soit $C = r_0 v_0$.
3. L'accélération en coordonnées polaires pour un mouvement plan quelconque est
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$
L'équation du mouvement, en projection sur le vecteur radial, donne :
$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r)$$
Comme $r^2\dot{\theta} = C$, on obtient $\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} = \frac{F(r)}{m}$ soit
$$\boxed{\ddot{r} - \frac{(r_0 v_0)^2}{r^3} = \frac{F(r)}{m}}$$
4. On pose $r(t) = r_0(1 + \varepsilon(t))$ et on linéarise l'équation précédente au premier ordre non nul :
$$\left\{\begin{array}{lcl} \ddot{r}(t) & = & r_0\ddot{\varepsilon}(t) \\ \frac{1}{r^3} & = & \frac{1}{r_0^3(1+\varepsilon)^3} = \frac{1}{r_0^3}(1 - 3\varepsilon + \dots) \\ \frac{F(r)}{m} & = & \frac{F(r_0 + r_0\varepsilon)}{m} = \frac{F(r_0)}{m} + \frac{F'(r_0)}{m}r_0\varepsilon + \dots \end{array}\right.$$
En notant que $\frac{F(r_0)}{m} = -\frac{v_0^2}{r_0}$, on voit que les termes constants, d'ordre 0, s'annulent et il reste
$$r_0\ddot{\varepsilon} + \frac{3v_0^2}{r_0}\varepsilon = \frac{F'(r_0)}{m}r_0\varepsilon \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{\varepsilon} - \frac{1}{m}\left(\frac{3F(r_0)}{r_0} + F'(r_0)\right)\varepsilon = 0}$$
On reconnait l'équation d'un oscillateur harmonique, synonyme d'oscillations de r autour de r_0 et donc d'une évolution ultérieure du système autour du cercle initial, à condition que le coefficient devant le terme en ε soit positif. Il faut donc
$$\boxed{\frac{3F(r_0)}{r_0} + F'(r_0) < 0}$$
5. Pour un champ de force de la forme $F(r) = \frac{-k}{r^n}$, on a $F'(r) = \frac{nk}{r^{n+1}}$. La condition précédente s'écrit donc $\frac{-3k}{r_0^{n+1}} + \frac{nk}{r_0^{n+1}} > 0$ soit $\boxed{k(n-3) < 0}$.
Pour avoir une trajectoire circulaire, il faut déjà avoir un champ attractif, soit $k > 0$, de sorte que la condition de stabilité est $n < 3$. Dans le cas de la gravitation, $n = 2$, et ainsi la trajectoire circulaire apparaît stable : ouf !