MI – TD 3

Approche énergétique du mouvement d'un point matériel

I - Distance minimale de freinage

Une voiture roulant à 50 km/h s'immobilise sur une route rectiligne et horizontale au bout d'une distance de 40 m. En supposant que la force de frottement entre le sol et la voiture est constante, déterminer la distance de freinage si le véhicule roule à 80 km/h. On négligera la résistance de l'air.

II - Mouvement rectiligne uniforme

Un skieur et son équipement, de masse $m = 80\,\text{kg}$, remonte une pente rectiligne, inclinée d'un angle $\alpha = 20\,°$.Il est tracté par la perche d'un téléski qui exerce une force de traction ayant la même direction que la perche qui forme un angle $\beta = 20\,°$ avec la pente. La composante tangentielle de la force $\vec{R}$ exercée par la neige sur les skis vaut $R_T = 50\,\text{N}$. Le téléski tire le skieur et son équipement à vitesse constante sur un distance $L = 1{,}5\,\text{km}$. On se place dans tout l'exercice dans le repère $(Oxyz)$ où (Ox) est l'axe du mouvement et (Oy) l'axe du plan vertical contenant (Ox).

1. Faire le bilan des forces qui s'appliquent sur le skieur et les représenter sur un schéma.
2. Déterminer le travail du poids du système lors de ce déplacement.
3. Déterminer le travail de la réaction du sol lors de ce déplacement.
4. Déterminer le travail de la tension du câble lors de ce déplacement.
5. Quelle est la puissance mécanique dépensée pour faire monter le skieur ?
6. Sachant qu'il y a au maximum un skieur tous les 12 m et que la vitesse linéaire du téléski est de 2,7 m/s, quelle doit être la puissance minimale du moteur électrique alimentant le téléski ?

III - Molécule diatomique

Le but de l'exercice est d'étudier le mouvement des deux atomes H et Cl l'un par rapport à l'autre dans la molécule H−Cl . L'atome de chlore étant beaucoup plus lourd que l'atome d'hydrogène, on pourra le considérer comme fixe dans le référentiel galiléen d'étude, et on étudiera le mouvement de l'atome d'hydrogène par rapport à lui. Le système sera donc : l'atome H.
De plus, nous n'étudierons que le mouvement à une dimension le long de l'axe (Ox) qui correspond à l'axe de la liaison H−Cl. On note r la distance entre les deux atomes et on néglige le poids.
Du fait de la proximité de l'atome de chlore, H subit des forces dont la résultante est associée à l'énergie potentielle suivante :

$$\mathcal{E}_p(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r}$$

où A et B sont des constantes réelles positives.

1. Tracer l'allure de $\mathcal{E}_p(r)$. Quel terme correspond à une action attractive ? et quel terme correspond à une action répulsive de la part du chlore ? Comment peut-on interpréter ces deux actions qualitativement ?
2. On constate qu'il existe une valeur r_0 de r correspondant à un minimum d'énergie potentielle. Exprimer r_0 en fonctiond e A et B. Vérifier par le calcul que $r = r_0$ est une position d'équilibre stable.
3. Déterminer $\mathcal{E}_{diss}$, l'énergie de dissociation de la molécule, c'est-à-dire l'énergie qu'il faut fournir à l'atome H pour qu'il s'éloigne de Cl à l'infini.

IV - Glissades et frottement sur plan incliné

À l'instant initial $t = 0$, un palet supposé ponctuel et de masse m se trouve en O sur un plan incliné. Le plan incliné fait un angle α avec l'horizontale. Le palet est lancé avec une vitesse initiale de norme v_0 vers le haut du plan incliné. On appelle B le point en lequel sa vitesse s'annule.

1. Les frottements étant négligés, par application du théorème de l'énergie cinétique, déterminer la distance d'arrêt OB, notée d. Par application du même théorème, déduire la vitesse du palet lorsqu'il repasse par le point O.

On note μ le facteur de frottement du plan incliné. S'il y a glissement, on a $\dfrac{\|\overrightarrow{T}\|}{\|\overrightarrow{N}\|} = \mu$ où $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$ sont respectivement la composante tangentielle et la composante normale de la réaction du support.

2. Calculer le travail des forces de frottement entre O et B', nouveau point d'arrêt.
3. Par application du théorème de l'énergie cinétique déterminer la nouvelle distance OB', appelée d'.
4. L'angle d'inclinaison étant faible, le palet s'immobilise en B'. Présenter le bilan énergétique global pour le parcours OB' c'est-à-dire sa variation d'énergie mécanique pour l'aller.
5. Si l'angle est faible le palet s'immobilise, mais si l'angle est important le palet repart ensuite vers le bas. Déterminer l'expression de l'angle minimal α_0 pour lequel le palet repart vers le bas.
6. Dans le cas où $\alpha > \alpha_0$, déterminer la vitesse du palet lorsqu'il repasse en O. Présenter le bilan énergétique global pour le parcours $OB'O$, c'est-à-dire la variation totale d'énergie mécanique pour l'aller-retour.

V - Anneau en mouvement sur une hélice

Les équations en coordonnées polaires d'une hélice rigide d'axe vertical Oz sont $r = a$ et $z = h\theta$. Un petit anneau enfilé sur l'hélice est abandonné sans vitesse initiale au point d'altitude $H = 2\pi h$. En assimilant l'anneau à un point matériel mobile sans frottement, calculer le temps qu'il met pour atteindre le plan horizontal $z = 0$.

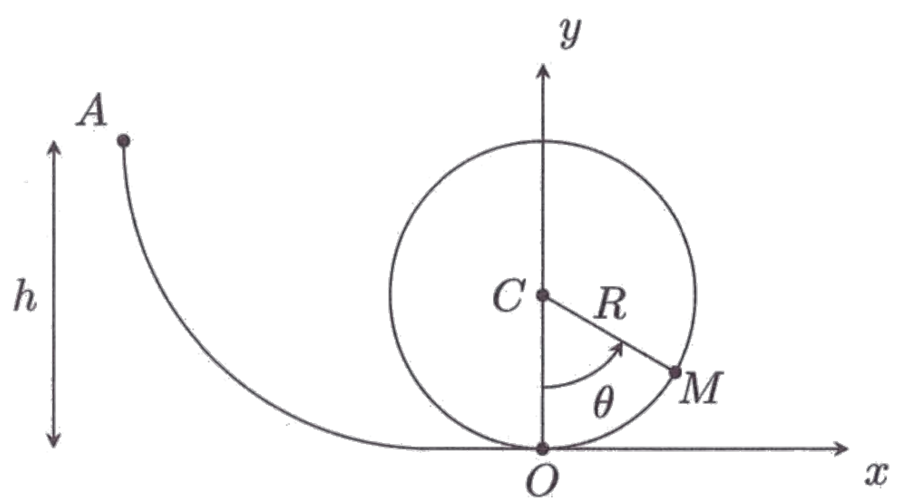
VI - Mouvement de trois électrons

Trois électrons sont retenus aux sommets d'un triangle équilatéral de côté a puis sont abandonnés simultanément.

1. Faire un schéma représentant le système à l'instant initial, en représentant les forces s'exerceant sur chacun des électrons. Caractériser le mouvement de chacun des électrons. Faire un schéma à un instant quelconque. Que peut-on dire du triangle dont les sommets sont les positions des trois électrons ?
2. Exprimer l'énergie potentielle de chacun des électrons.
3. Déterminer la vitesse limite de chacun. Faire l'application numérique.

Données : $m = 9 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$, $a = 2 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$, $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}10^9\text{SI}$.

VII - Looping

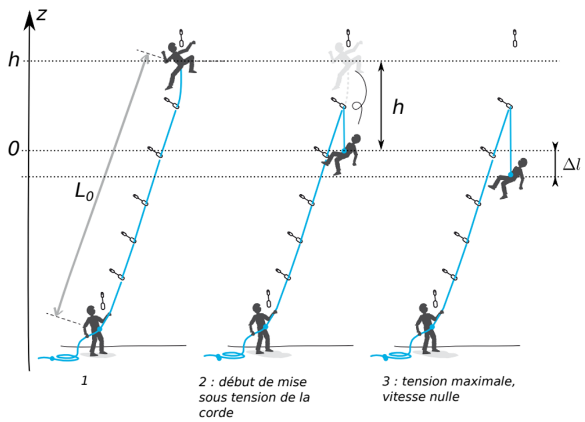


Une bille supposée ponctuelle en M et de masse m est lâchée sans vitesse initiale en un point A. Elle glisse sans frottement le long d'une pente incurvée puis passe par une piste circulaire de rayon R et de centre C et dont le point le plus bas est O. A est à une altitude h par rapport à O.
On néglige tout frottement. On souhaite déterminer la condition pour que la bille fasse un looping c'est-à-dire un tour complet de la piste circulaire sans jamais perdre le contact avec la piste.

1. À l'aide du théorème de l'énergie mécanique, déterminer la vitesse de la bille quand elle arrive en O.
2. À l'aide de la RFD (2e loi de Newton), déterminer l'expression de la norme de la composante normale de la réaction de la piste circulaire sur la bille en fonction de m, g, R, v et θ, où v est la norme de la vitesse de la bille.
3. À l'aide du théorème de l'énergie cinétique, déterminer la norme de la vitesse de la bille en une position θ quelconque sur la piste circulaire, en fonction de la norme de la vitesse en O et de g, R et θ.
4. Déduire de ce qui précède que la bille fait un looping si $h \geq \frac{5}{2}R$.

VIII - Corde d'escalade

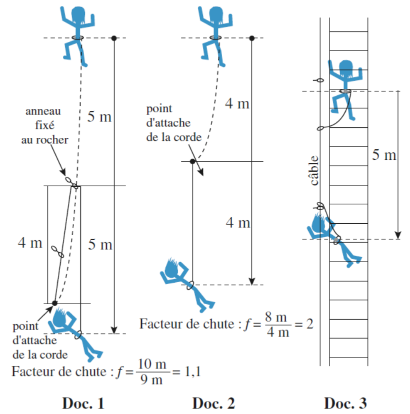
On étudie un grimpeur qui effectue une chute. Une corde d'escalade de longueur L_0 peut en première approximation être modélisée par un ressort de longueur à vide L_0 et de raideur $k = \frac{\alpha}{L_0}$, avec α une constante caractéristique de la corde qui rend compte de sa raideur. Le grimpeur est en chute libre sur une hauteur h pendant laquelle la corde n'est pas sous tension. Puis la corde passe sous tension, et la chute se poursuit sur une hauteur Δl. La vitesse du grimpeur devient ainsi nulle au bout d'une hauteur totale de chute $h + \Delta l$. Dans tout l'exercice, on négligera les frottements de l'air.



On prendra $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, une corde avec $\alpha = 2{,}0 \cdot 10^4$ N et un grimpeur de masse $m = 100\,\mathrm{kg}$.

1. Redémontrer que l'énergie potentielle élastique pour un ressort d'élongation $\delta l = l - l_0$ est $E_{p,el} = \dfrac{1}{2}k\delta l^2$.
2. A l'aide d'un bilan énergétique, donner l'expression de la vitesse v_h atteinte par le grimpeur au moment où la corde commence à se tendre. Faire l'application numérique pour une hauteur de chute $h = 5$ m.
3. A l'aide d'un bilan énergétique, donner l'expression de la vitesse maximale atteinte par le grimpeur v_{max}
4. Toujours à l'aide d'une méthode énergétique, trouver l'équation du second ordre permettant d'exprimer l'allongement maximal Δl de la corde.
5. On suppose dans un premier temps que $\Delta l \ll h$ afin de négliger un terme ci-dessus et de simplifier le calcul. Donner alors l'expression de l'allongement Δl de la corde en fonction de m, g, h et k.
6. Donner l'expression complète de Δl sans faire l'approximation précédente.

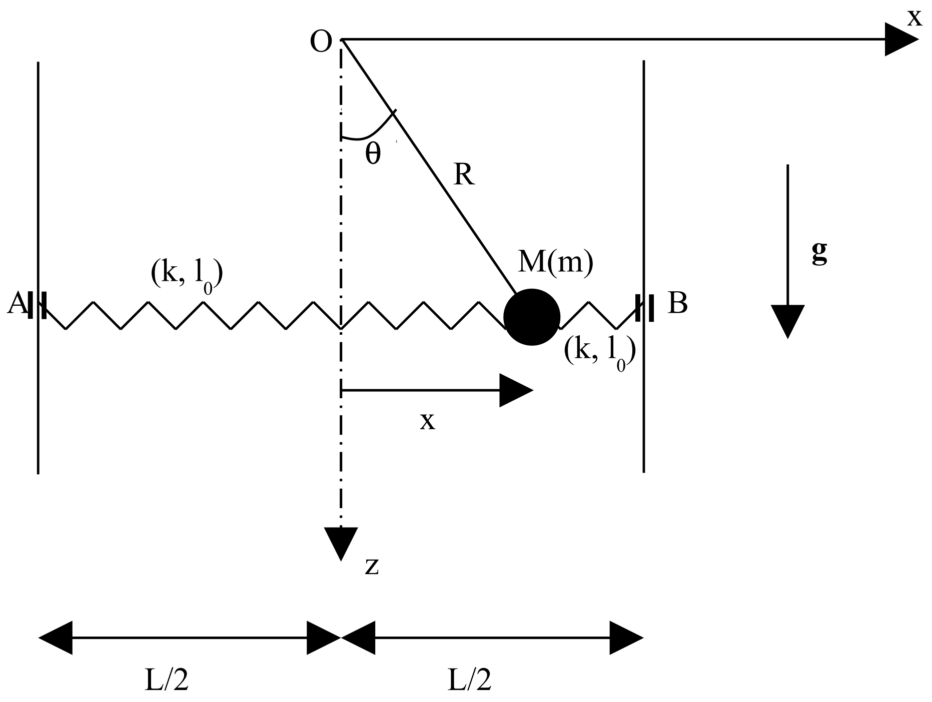
On définit le facteur de chute f comme le rapport de la hauteur de chute tant que la corde n'est pas tendue sur la longueur L_0 de corde utilisée. Si au moment de la chute, la corde est tendue, ce facteur de chute vaut $f = \frac{h}{L_0}$ (docs. 1 et 2). Dans des conditions normales d'utilisation f est compris entre 0 et 2. Le maillon fragile dans la chaîne d'assurance d'un grimpeur n'est pas la corde (qui peut résister à des forces de plus de 18 kN), ni les points où la corde est attachée au rocher (résistance de l'ordre de 20 kN) mais le grimpeur(une force de 12 kN exercée sur le bassin provoque sa rupture) !



7. Donner l'expression de la force maximale F_{max} exercée par la corde sur le grimpeur, en fonction de m, g, α et du facteur de chute $f = \frac{h}{L_0}$.
8. À quelle condition sur f l'approximation faite à la question 4. est-elle valable ?
9. Calculer l'élongation maximale de la corde et la force maximale pour $L_0 = 10\,\mathrm{m}$ et $f = 1$.
10. Qu'en est-il pour le doc. 3 où la hauteur de chute est de 5 m et la longueur de la longe (corde à laquelle est accroché le grimpeur) est de 1 m ?

IX - Détermination et étude de positions d'équilibre

Un pendule est constitué d'une petite bille en acier, supposée ponctuelle en M et de masse m, et située au bout d'une tige rigide de masse négligeable, de longueur R et fixée en O par une liaison pivot parfaite. M est attaché à deux ressorts qui sont maintenus horizontaux par des liaisons parfaites en A et B. Les ressorts sont identiques : raideur k, longueur à vide l_0. La liaison pivot en O est parfaite.
Le problème est tel que la longueur de chacun des ressorts est toujours supérieure à leur longueur à vide, quelle que soit la position du point M. Les deux ressorts sont donc toujours allongés (ou encore tendus). La distance $AB = L$ et on a $R < L/2$, de façon que θ puisse prendre n'importe quelle valeur. On travaille dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen et avec le repère cartésien (O, x, y, z).
On étudie les équilibres du point M.



0. On admet que la composante normale de la réaction de la tige est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$. Proposer une schématisation du contact bille-tige permettant d'expliquer ce résultat surprenant.
1. Justifier que le système est en mouvement conservatif.
2. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} de M en fonction de z, puis en fonction de θ. On prendra cette énergie potentielle nulle pour $z = R$.
3. Donner les expressions, en fonction de L, l_0, k et x, des forces de rappel $\overrightarrow{F}_A$ du ressort fixé en A et $\overrightarrow{F}_B$ du ressort fixé en B.

Dans la suite, on posera avantageusement $a = \frac{L}{2} - l_0$, pour simplifier les expressions.

4. Déterminer, en fonction de a, k et x, les expressions des travaux T_A et T_B associés aux forces de rappel élastique de chacun des deux ressorts quand M se déplace de la longueur x à partir de la position centrale et vers B.
5. Donner alors les expressions des énergies potentielles élastiques E_{pA} et E_{pB} dues à chacun des deux ressorts en fonction des mêmes grandeurs, en supposant que ces deux énergies potentielles sont nulles pour $x = 0$.
6. Déterminer enfin l'expression de l'énergie potentielle totale E_{pT} en fonction de θ seulement. Pour simplifier les expressions, on introduira les constantes $\omega_1^2 = \frac{g}{R}$ et $\omega_2^2 = 2\frac{k}{m}$.
7. Trouver les positions d'équilibre de M. Pour chaque position d'équilibre, faire un schéma dans lequel on représentera toutes les forces permettant d'expliquer l'équilibre.
8. Discuter de la stabilité des positions d'équilibre trouvées en 7. en fonction des valeurs relatives de ω_1^2 et ω_2^2. Que peut-on dire si $\omega_1 = \omega_2$?