

Correction MI – TD 3

Approche énergétique du mouvement d'un point matériel

I - Distance minimale de freinage

On note v_0 la vitesse initiale de la voiture et d la distance de freinage. On applique le théorème de l'énergie cinétique entre le début du freinage et l'arrêt total : $\Delta E_c = \sum W(\vec{F})$.

On a évidemment $\Delta E_c = E_{c,f} - E_{c,i} = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$. Les forces s'appliquant sur la voiture sont son poids \vec{P} et la réaction de la route \vec{R} . Le mouvement étant horizontal, le poids ne travaille pas et seule la composante tangentielle de \vec{R} , qui correspond aux frottements, travaille. Comme elle est constante, on voit rapidement $W(\vec{R}) = \int_{M_i}^{M_f} \vec{R} \cdot d\vec{\ell} = \int_{x_i}^{x_f} -F dx = -Fd$. On a donc $\frac{1}{2}mv_0^2 = Fd$.

Si on note d_1 et d_2 les distances de freinage pour des vitesses initiales respectives v_1 et v_2 , on a $\frac{d_2}{d_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2$.

La distance de freinage est donc proportionnelle au carré de la vitesse.

Pour le 2nd cas, on trouve $d_2 = 40 \left(\frac{80}{50}\right)^2 = 40 \times 2,56 = 102$ m.

II - Mouvement rectiligne uniforme

1. Les forces s'appliquant sur le système sont :

- le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg \sin \alpha \vec{e}_x - mg \cos \alpha \vec{e}_y$
- la réaction de la neige $\vec{R} = R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y = -R_T \vec{e}_x + R_N \vec{e}_y$
- la traction du télési $\vec{T} = T_x \vec{e}_x + T_y \vec{e}_y = T \cos \beta \vec{e}_x + T \sin \beta \vec{e}_y$

2. Le travail élémentaire du poids est $dW(\vec{P}) = \vec{P} \cdot d\vec{\ell}$. Comme le mouvement est uniquement le long de l'axe (Ox) , $d\vec{\ell} = dx \vec{e}_x$ et donc $dW(\vec{P}) = P_x \cdot dx = -mg \sin \alpha dx$. Le travail fini du poids sur le déplacement est alors $W(\vec{P}) = \int -mg \sin \alpha dx = -mg \sin \alpha \int dx$ et donc $W_L(\vec{P}) = -mg \sin \alpha L$.

La valeur négative correspond bien au fait que, sur ce déplacement, le poids est résistant. A.N. : $W_L(\vec{P}) = -410$ kJ.

3. On applique le même raisonnement pour \vec{R} : $W(\vec{R}) = \int \vec{R} \cdot d\vec{\ell} = \int R_x dx = -\int R_T dx$ et donc $W_L(\vec{R}) = -R_T L$.
On retrouve une valeur négative, ce qui est cohérent avec le fait que c'est la composante tangentielle de \vec{R} , qui correspond aux frottements, qui travaille. A.N. : $W_L(\vec{R}) = -75$ kJ.

4. On peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre le départ et l'arrivée : le mouvement étant uniforme, on a $\Delta E_c = 0$, ce qui mène à $\sum W_L(\vec{F}) = W_L(\vec{P}) + W_L(\vec{T}) + W_L(\vec{R}) = 0$ et donc

$$W_L(\vec{T}) = -(W_L(\vec{P}) + W_L(\vec{R})) = (mg \sin \alpha + R_T)L$$

Cette valeur, positive, correspond bien au rôle moteur du télési. A.N. : $W_L(\vec{P}) = 485$ kJ

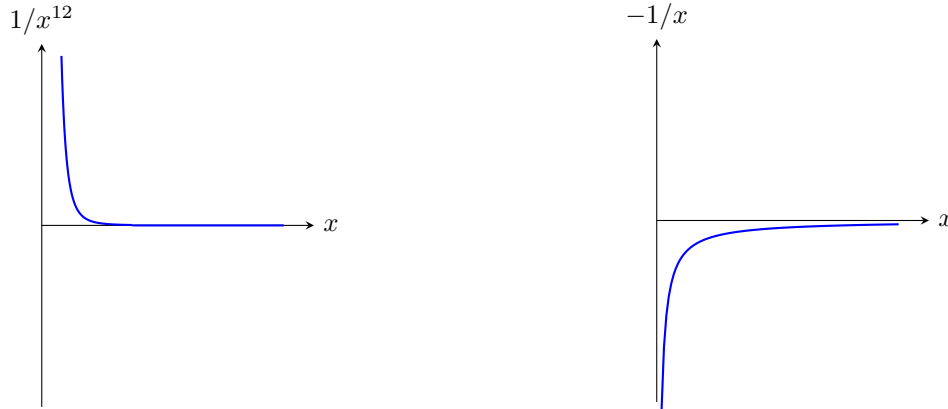
5. La puissance dépensée est la puissance de la force de traction \vec{T} . On peut la calculer soit en partant de $\mathcal{P}(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \vec{v}$ et en utilisant le fait que le mouvement est rectiligne uniforme pour déterminer \vec{T} , soit en partant de $\mathcal{P}(\vec{T}) = \frac{dW(\vec{T})}{dt}$. On trouve $\mathcal{P}(\vec{T}) = (mg \sin \alpha + R_T)v$. A.N. : $\mathcal{P}(\vec{T}) = 874$ W.

6. Si la longueur du télési est $L = 1500$ m et que les skieurs sont espacés de $d = 12$ m au minimum, alors le nombre de skieurs tractés simultanément par le télési est au maximum $n = \frac{L}{d} = 125$. La puissance

minimale du télési est alors $\mathcal{P}_T = n\mathcal{P}(\vec{T})$ soit $\mathcal{P}_T = \frac{(mg \sin \alpha + R_T)Lv}{d}$. A.N. : $\mathcal{P}_T = 109$ kW

III - Molécule diatomique

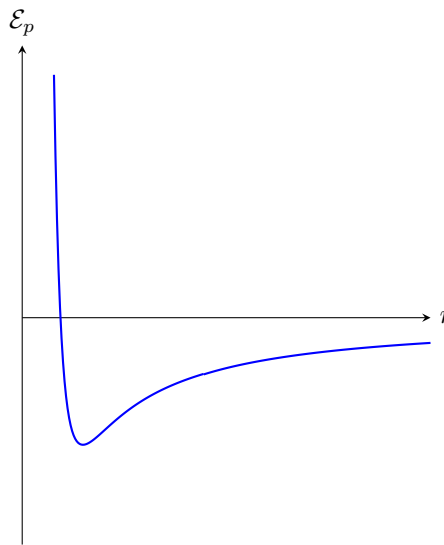
1. Pour tracer l'allure de la courbe, il faut étudier les 2 termes dans l'énergie. Traçons $x \rightarrow \frac{1}{x^{12}}$ et $x \rightarrow \frac{-1}{x}$:



On constate que pour des valeurs très petites de r , c'est le terme en puissance 12 qui est beaucoup plus grand et on a donc $\mathcal{E}_p(r)$ qui tend vers $+\infty$ quand r tend vers 0.

En revanche, pour des valeurs plus grandes de r , c'est le terme en puissance 1 qui est beaucoup plus grand (en valeur absolue), et on a donc $\mathcal{E}_p(r)$ qui tend vers 0^- quand r tend vers ∞ .

Le graphe associé à l'évolution de \mathcal{E}_p en fonction de r est donnée ci-dessous :



Pour déterminer le terme correspondant à une action attractive ou répulsive, étudions chaque terme séparément. On constate que sur le graphe de $1/r^{12}$, l'énergie potentielle est décroissante, ce qui implique $\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} < 0$. Or on sait que la relation entre la force et l'énergie potentielle dont elle dérive est $\vec{F} = -\text{grad } \mathcal{E}_p$.

On en déduit que $F_r = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} > 0$. Il s'agit donc du terme répulsif.

De la même façon, sur le graphe en $-1/r$ l'énergie potentielle est croissante. Il s'agit donc du terme attractif.

L'action attractive peut être interprétée comme l'interaction entre deux charges de signes différents, tandis que l'action répulsive peut être interprétée comme l'impossibilité d'interpénétration des deux atomes.

2. Pour trouver le minimum de cette énergie potentielle, il faut la dériver par rapport à r et l'annuler :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} = -12\frac{A}{r^{13}} + \frac{B}{r^2} \quad \text{or} \quad \left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dr}\right)_{r=r_0} = 0$$

Ainsi :

$$-12\frac{A}{r_0^{13}} + \frac{B}{r_0^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{r_0 = \sqrt[11]{\frac{12A}{B}}}$$

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'une position d'équilibre stable, il faut dériver une deuxième fois :

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dr^2} = 12 \times 13 \frac{A}{r^{14}} - 2 \frac{B}{r^3} = \frac{1}{r^3} \left(156 \frac{A}{r^{11}} - 2B \right)$$

En remplaçant r par r_0 , on obtient :

$$\left(\frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dr^2} \right)_{r=r_0} = \frac{1}{\left(\frac{12A}{B} \right)^{3/11}} \left(156 \frac{A}{12A} - 2B \right) = \left(\frac{12A}{B} \right)^{-3/11} (13B - 2B) = 11B \left(\frac{12A}{B} \right)^{-3/11} > 0$$

car B est une constante positive.

Donc r_0 est bien une position d'équilibre stable.

3. L'énergie de dissociation de la molécule est donnée par :

$$\mathcal{E}_{\text{diss}} = \mathcal{E}_p(+\infty) - \mathcal{E}_p(r_0)$$

Il suffit donc de calculer :

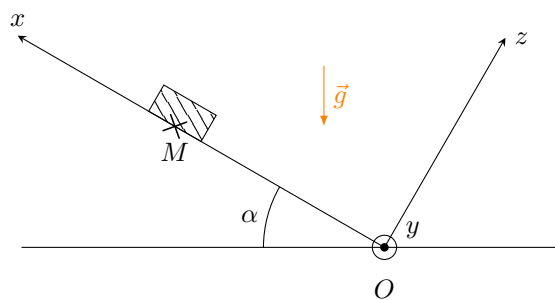
$$\mathcal{E}_{\text{diss}} = 0 - \left(\frac{A}{r_0^{12}} - \frac{B}{r_0} \right) = \frac{1}{r_0} \left(B - \frac{A}{r_0^{11}} \right) = \left(\frac{12A}{B} \right)^{-1/11} \left(B - \frac{AB}{12A} \right)$$

D'où :

$$\mathcal{E}_{\text{diss}} = \frac{11}{12} B \left(\frac{12A}{B} \right)^{-1/11}$$

IV - Glissades et frottement sur plan incliné

1. On se place dans le référentiel terrestre (\mathcal{R}) supposé galiléen. On étudie le palet supposé ponctuel en M . On utilise un repère cartésien (O, x, y, z) avec (Ox) le long du plan support du mouvement et vers le haut et (Oz) orthogonal à ce plan (cf schéma).



Le palet étant lancé vers le haut de la piste, la vitesse initiale et l'ensemble des forces (poids, réaction du support) sont coplanaires et la trajectoire est la droite intersection du plan du support et du plan (\vec{v}_0, \vec{g}) .

On a $\vec{OM} = x \vec{e}_x$, $\vec{v}_{M/R} = \dot{x} \vec{e}_x$ et $d\vec{OM} = dx \vec{e}_x$.

Le poids s'exprime $\vec{P} = m \vec{g} = -mg(\cos(\alpha) \vec{e}_z + \sin(\alpha) \vec{e}_x)$.

La réaction du support s'exprime $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T} = \vec{N} = \|\vec{N}\| \vec{e}_z = N_z \vec{e}_z$ car la composante tangentielle est nulle puisqu'il n'y a pas de frottement et $N_z > 0$ compte tenu de l'orientation de l'axe (Oz) (la réaction normale repousse le palet vers l'extérieur du support incliné).

On calcule le travail du poids entre O et B :

$$W_{O \rightarrow B}(\vec{P}) = \int_O^B \vec{P} \cdot d\vec{OM} = -mg \sin(\alpha) \int_{x(O)}^{x(B)} dx = -mg \sin(\alpha) (x(B) - x(O)) = -mg \sin(\alpha) d$$

Le travail de la réaction du support est nul puisqu'elle est orthogonale au déplacement : $\vec{R} \perp d\vec{OM}$.
La variation d'énergie cinétique s'exprime :

$$\Delta E_c \equiv E_c(B) - E_c(O) = \frac{1}{2}m\|\vec{v}(B)\|^2 - \frac{1}{2}m\|\vec{v}(O)\|^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

Finalement, par application à M du théorème de l'énergie cinétique dans (\mathcal{R}) supposé galiléen :

$$\Delta E_c = W_{O \rightarrow B}(\vec{P}) + W_{O \rightarrow B}(\vec{R}) \quad \text{d'où} \quad -\frac{1}{2}mv_0^2 = -mg \sin(\alpha)d$$

et finalement

$$d = \frac{v_0^2}{2g \sin(\alpha)}$$

On note v'_0 la vitesse du palet quand il redescend et v'_0 sa norme. On a

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_0'^2 \quad \text{et} \quad W_{B \rightarrow O}(\vec{P}) + W_{B \rightarrow O}(\vec{R}) = mg \sin(\alpha)d$$

On en déduit que

$$v_0'^2 = \sqrt{2g \sin(\alpha)d} \quad \text{d'où} \quad v'_0 = \sqrt{v_0^2} = v_0$$

On trouve donc la vitesse quand le palet repasse en O : $\vec{v}'_0 = -v_0 \vec{e}_x$.

2. On a maintenant $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} = T_x \vec{e}_x + N_z \vec{e}_z$. On cherche $W_{O \rightarrow B'}(\vec{T})$. Pour déterminer ce travail, il est indispensable de connaître l'expression de \vec{T} . On y accède par application de la RFD à M dans (\mathcal{R}) . Par projection sur \vec{e}_z on trouve que $N_z = \vec{N} \cdot \vec{e}_z = mg \cos(\alpha)$ d'où $\|\vec{N}\| = |N_z| = mg \cos(\alpha)$ et, tant qu'il y a glissement, $\|\vec{T}\| = \mu \|\vec{N}\| = \mu mg \cos(\alpha)$. Les frottements sont ici résistants et, pendant la phase de montée, ils sont donc orientés selon $-\vec{e}_x$. Finalement, $\vec{T} = -\mu mg \cos(\alpha) \vec{e}_x$. On en déduit

$$W_{O \rightarrow B'}(\vec{T}) = \int_O^B \vec{T} \cdot d\vec{OM} = -\mu mg \cos(\alpha) \int_{x(O)}^{x(B')} dx$$

et

$$W_{O \rightarrow B'}(\vec{T}) = -\mu mg \cos(\alpha)(x(B') - x(O))$$

3.

$$\Delta E_c = W_{O \rightarrow B'}(\vec{P}) + W_{O \rightarrow B'}(\vec{T}) \quad \text{d'où} \quad -\frac{1}{2}mv_0^2 = -mg \sin(\alpha)d' - \mu mg \cos(\alpha)d'$$

et finalement

$$d' = \frac{v_0^2}{2g(\sin(\alpha) + \mu \cos(\alpha))} < d$$

4. Par application du théorème de l'énergie mécanique au point M dans (\mathcal{R}) :

$$\Delta E_m = W_{O \rightarrow B'}(\vec{T}) = -\mu mg \cos(\alpha)d'$$

Finalement

$$\Delta E_m = \frac{-\mu mv_0^2 \cos(\alpha)}{2(\sin(\alpha) + \mu \cos(\alpha))} < 0$$

Une partie de l'énergie mécanique s'est dissipée en raison des frottements résistants.

5. En B' le palet s'arrête, on a donc en B' , $\dot{x}(t_{B'}) = 0$. Pour savoir si le palet repart vers le bas après s'être arrêté, il faut traduire le fait que, s'il repart, alors la coordonnée de son vecteur vitesse le long de l'axe (Ox) devient négative, c'est-à-dire que $\dot{x}(t > t_{B'}) < 0$. S'il repart c'est donc que \dot{x} est décroissante puisque sa valeur passe de zéro à une valeur négative. Cela se traduit mathématiquement par $\forall t > t_{B'}, \ddot{x} < 0$.

On applique la relation fondamentale de la dynamique au point M dans (\mathcal{R}) , et on la projette sur \vec{e}_x et \vec{e}_z , on obtient :

$$\forall t > t_{B'} \begin{cases} \text{sur } \vec{e}_x : m\ddot{x} = T_x - mg \sin(\alpha) \\ \text{sur } \vec{e}_z : 0 = N_z - mg \cos(\alpha) \end{cases} \quad (1.1)$$

On en déduit rapidement que $N_z = mg \cos(\alpha)$.

D'autre part, si le palet repart, il va vers le bas et les frottements résistants sont donc vers le haut : $T_x > 0$ et $\|\vec{T}\| = T_x$. Et s'il repart, c'est qu'il glisse, donc $\|\vec{T}\| = \mu\|\vec{N}\| = |N_z|$. Finalement, si le palet repart vers le bas, $T_x = mg \cos(\alpha)$. On a donc, si le palet repart

$$\forall t > t_{B'}, m\ddot{x} = \mu mg \cos(\alpha) - mg \sin(\alpha) > 0 \quad \text{d'où} \quad \tan(\alpha) > \mu$$

L'angle minimal pour que le palet reparte vers le bas est

$$\boxed{\alpha_0 = \arctan(\mu)} \quad : \text{ si } \alpha > \alpha_0, \text{ le palet repart vers le bas}$$

6. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique ou le théorème de l'énergie mécanique pour l'aller-retour, on trouve

$$\boxed{v'_0 = v_0 \sqrt{\frac{\tan(\alpha) - \mu}{\tan(\alpha) + \mu}} \quad \text{d'où} \quad \vec{v}'_0 = -v_0 \sqrt{\frac{\tan(\alpha) - \mu}{\tan(\alpha) + \mu}} \vec{e}_x}$$

Remarque : compte tenu du domaine de définition de la racine carrée, l'expression précédente n'est possible que si $\tan(\alpha) - \mu > 0$, condition qui est bien vérifiée si le palet repart.

Bilan global d'énergie mécanique :

$$\boxed{\frac{\Delta E_m}{O \rightarrow B' \rightarrow O} = \frac{-\mu m v_0^2 \cos(\alpha)}{\sin(\alpha) + \mu \cos(\alpha)} < 0}$$

V - Anneau en mouvement sur une hélice

Lors du mouvement de l'anneau, seul sont poids travaille. On peut donc appliquer le théorème de l'énergie mécanique entre les points d'altitude H et z . On a alors $\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = 0$ soit, comme la vitesse initiale est nulle $(\frac{1}{2}mv^2 - 0) + mg(z - H) = 0$ et donc

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(H - z)$$

Par ailleurs, le point M étant contraint à se déplacer sur l'hélice, on peut écrire $\overrightarrow{OM} = a\vec{e}_r + z\vec{e}_z = a\vec{e}_r + h\theta\vec{e}_z$ et donc $\vec{v} = a\dot{\theta}\vec{e}_\theta + h\dot{\theta}\vec{e}_z$ ce qui implique $v^2 = \dot{\theta}^2(a^2 + h^2)$ (car, comme on part de $\theta = 2\pi$ pour finir en $\theta = 0$, $\dot{\theta} < 0$). On aboutit finalement à

$$\frac{1}{2}m(a^2 + h^2)\dot{\theta}^2 = mgh(2\pi - \theta).$$

Soit, comme $\dot{\theta} < 0$ (on part de $\theta = 2\pi$ pour finir en $\theta = 0$) :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{2gh}{a^2 + h^2}} \sqrt{2\pi - \theta} \quad \text{ou} \quad -\frac{d\theta}{\sqrt{2\pi - \theta}} = \sqrt{\frac{2gh}{a^2 + h^2}} dt$$

On intègre alors entre l'instant $t = 0$ (pour lequel $\theta = 2\pi$) et l'instant $t = T$ où l'anneau atteint le sol (pour lequel $\theta = 0$) :

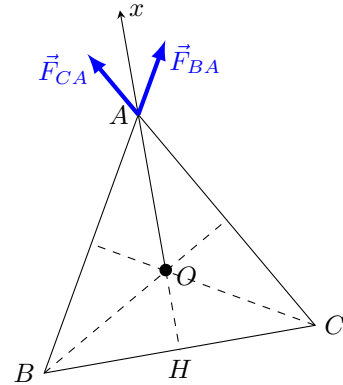
$$\int_{2\pi}^0 -\frac{d\theta}{\sqrt{2\pi - \theta}} = \sqrt{\frac{2gh}{a^2 + h^2}} \int_0^T dt \implies [2\sqrt{2\pi - \theta}]_{2\pi}^0 = \sqrt{\frac{2gh}{a^2 + h^2}} [t]_0^T \implies 2\sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{2gh}{a^2 + h^2}} T.$$

Finalement

$$\boxed{T = 2\sqrt{\frac{\pi(a^2 + h^2)}{gh}}}$$

VI - Mouvement de trois électrons

1. Initialement les 3 électrons sont aux 3 sommets d'un triangle équilatéral de côté a de centre O . Le système est évidemment symétrique et il suffit de s'intéresser à un électron pour en déduire le mouvement des deux autres. Si on appelle (Ox) l'axe passant par O et le premier électron, les forces qui s'appliquent sur celui-ci sont \vec{F}_{BA} et \vec{F}_{CA} . toujours par symétrie, on voit que la résultante de ces deux forces est colinéaire à l'axe (Ox) . Comme il en est de même pour les deux autres électrons et que, encore par symétrie, leurs vitesses (en norme) sont égales, on peut en déduire que chaque électron est animé d'un mouvement rectiligne accéléré.



On en déduit que les électrons restent positionnés sur un triangle équilatéral de centre O immobile¹.

2. L'électron situé en A est soumis aux deux forces d'interaction coulombienne $\vec{F}_{BA} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{AB^2} \cdot \vec{u}_{BA}$ et $\vec{F}_{CA} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{AC^2} \cdot \vec{u}_{CA}$. Si on note $x = OA$, on a $AB = AC = \frac{AH}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot AH = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} OA = \sqrt{3}x$. Donc $\vec{F}_{\rightarrow A} = \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{CA} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{3x^2} \cdot (\vec{u}_{BA} + \vec{u}_{CA})$. On a également $\vec{u}_{BA} + \vec{u}_{CA} = 2 \cos \frac{\pi}{6} \vec{u}_x = \sqrt{3} \vec{u}_x$. On trouve $\vec{F}_{\rightarrow A} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{3} x^2} \vec{u}_x$.

Cette force est la somme de deux forces conservatives, elle est donc elle-même conservative et dérive donc d'une énergie potentielle telle que $\frac{dE_p}{dt} = -F_x = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{3} x^2}$. On en déduit $E_p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{3} x} + E_{p0}$. On peut choisir, pour simplifier l'écriture, la référence d'énergie potentielle à l'infini c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow \infty} E_p(x) = 0$,

on obtient
$$E_p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{3} x}$$

3. Au cours de leur mouvement, les électrons ont une énergie mécanique constante. Initialement, les électrons sont immobiles et $x_0 = \frac{a}{\sqrt{3}}$, on a donc $\forall x$, $E_m(x) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$. Or $E_m(x) = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{3} x}$. Soit $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{3} x}$. La vitesse limite cherchée correspond à $x \rightarrow \infty$:

$$v_{lim} = \frac{e}{\sqrt{2\pi\epsilon_0 m a}}$$

Application numérique : $v_{lim} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{\sqrt{\frac{1}{18} 10^9 \times 9 \cdot 10^{-31} \times 2 \cdot 10^{-10}}} = 1,6 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$

VII - Looping

1. Grâce au théorème de l'énergie mécanique appliqué à la bille M supposée ponctuelle dans le référentiel terrestre (\mathcal{R}) supposé galiléen et lié à la piste on trouve, en O : $\|\vec{v}_O\| = \sqrt{2gh}$, d'où, en O : $\vec{v}_O = \sqrt{2gh} \vec{e}_x$.

2. On choisit un système de coordonnées polaires de centre C . On a $\vec{CM} = R \vec{e}_r$, $\vec{v}_{M/R} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ et $\vec{a}_{M/R} = -R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta = -\frac{v^2}{R} \vec{e}_r + R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$. On pose $\vec{N} = N_r \vec{e}_r$ où N_r est la coordonnée de la réaction normale que la piste circulaire exerce sur M . On applique la RFD à M dans \mathcal{R} . On projette sur \vec{e}_r et on trouve :

$$\vec{N} = - \left(m \frac{v^2}{R} + mg \cos(\theta) \right) \vec{e}_r \quad \text{Finalement} \quad \|\vec{N}\| = |N_r| = \left| m \frac{v^2}{R} + mg \cos(\theta) \right|$$

3.
$$v(\theta) = \sqrt{v_O^2 - 2gR(1 - \cos(\theta))}$$

Remarque : une norme étant définie positive, cette relation n'est valable que pour $\cos(\theta) \geq 1 - \frac{h}{R}$ ou $\theta < \arccos(1 - \frac{h}{R})$. Pour ne pas limiter la discussion suivante concernant le looping, il faut absolument que θ puisse prendre n'importe quelle valeur dans $[0; 2\pi]$, donc que $h \geq 2R$. Pour $h < 2R$, la bille s'arrête

1. Le fait que O reste fixe peut être retrouvé en considérant que le système total constitué des 3 électrons est isolé, et que son centre de gravité O reste donc immobile.

avant d'avoir débuté la deuxième moitié de la piste circulaire et il est donc impossible qu'elle fasse un looping.

4. Tant que la bille est en contact avec la piste $N_r < 0$. La bille quitte la piste pour $N_r = 0$. La bille fait un looping si $\forall \theta \in [0; 2\pi]$, $N_r < 0$. Or on a $N_r(\theta) = -\left(m \frac{v_O^2 - 2gR(1 - \cos(\theta))}{R} + mg \cos(\theta)\right)$. Donc on cherche $\forall \theta \in [0; 2\pi]$, $\left(m \frac{v_O^2 - 2gR(1 - \cos(\theta))}{R} + mg \cos(\theta)\right) > 0$ c'est-à-dire $\forall \theta \in [0; 2\pi]$, $v_O^2 > 2gR - 3gR \cos(\theta)$. Or, $\forall \theta \in [0; 2\pi]$, $2gR - 3gR \cos(\theta) \leq 5gR$, l'égalité étant réalisée pour $\theta = \pi$. On cherche donc $v_O^2 > 5gR$. Finalement

$$\boxed{\text{la bille fait un looping si } h \geq \frac{5R}{2}}$$

VIII - Corde d'escalade

1. voir cours
2. Entre $z = h$ et $z = 0$, la seule force qui s'applique sur le grimpeur est son poids. Il y a donc conservation de l'énergie mécanique : $E_m(h) = E_m(0)$.

Or $E_m(h) = E_c(h) + E_{pp}(h) = 0 + mgh$ et $E_m(0) = E_c(0) + E_{pp}(0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0$. On en déduit $\boxed{v_0 = \sqrt{2gh}}$.
A.N. : $v_0 = \sqrt{2 \times 10 \times 5} = 10 \text{ m s}^{-1}$.

3. Après $z = 0$, la corde est tendue, il faut alors prendre en compte la force de rappel élastique exercée par celle-ci. L'expression de l'énergie mécanique est donc, pour $z < 0$, $E_m(z) = E_c(z) + E_{pp}(z) + E_{p,el}(z)$ soit $E_m(z) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz + \frac{1}{2}kz^2$.

Le mouvement restant conservatif, on a toujours $\forall z$, $E_m(z) = E_m(0) = E_m(h) = mgh$, on en déduit

$$\dot{z}^2 = 2g(h - z) - \frac{k}{m}z^2 \quad (1.3)$$

En dérivant et en simplifiant par \dot{z} l'expression obtenue, on aboutit à $2\ddot{z} = -2g - 2\frac{k}{m}z$. La vitesse est maximale quand sa dérivée, c'est-à-dire \ddot{z} , s'annule. Cela se produit pour $z_m = -\frac{mg}{k}$. La vitesse maximale est alors $v_{max} = v(z_m)$ et, en remplaçant z par cette valeur dans l'équation 1.3, on trouve :

$$\boxed{v_{max} = \sqrt{2gh + \frac{mg^2}{k}}}$$

4. Lorsque l'allongement est maximum, on a $z = -\Delta l$ et $\dot{z} = 0$. L'équation 1.3 donne alors

$$\boxed{\Delta l^2 - \frac{2mg}{k}(\Delta l + h) = 0}$$

5. Si on suppose $\Delta l \ll h$, l'équation précédente se simplifie en $\Delta l^2 = \frac{2mg}{k}h$ soit $\boxed{\Delta l = \sqrt{\frac{2mgh}{k}}}$.

6. Il faut sinon résoudre l'équation du second degré obtenue précédemment.

Le discriminant est $\Delta = \left(\frac{2mg}{k}\right)^2 + 4 \times \frac{2mg}{k}h = \left(\frac{2mg}{k}\right)^2 \left(1 + \frac{2kh}{mg}\right) > 0$. Comme on sait $\Delta l > 0$, on ne garde que la racine positive de l'équation, ce qui donne : $\Delta l = \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}$ soit

$$\boxed{\Delta l = \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}\right)}$$

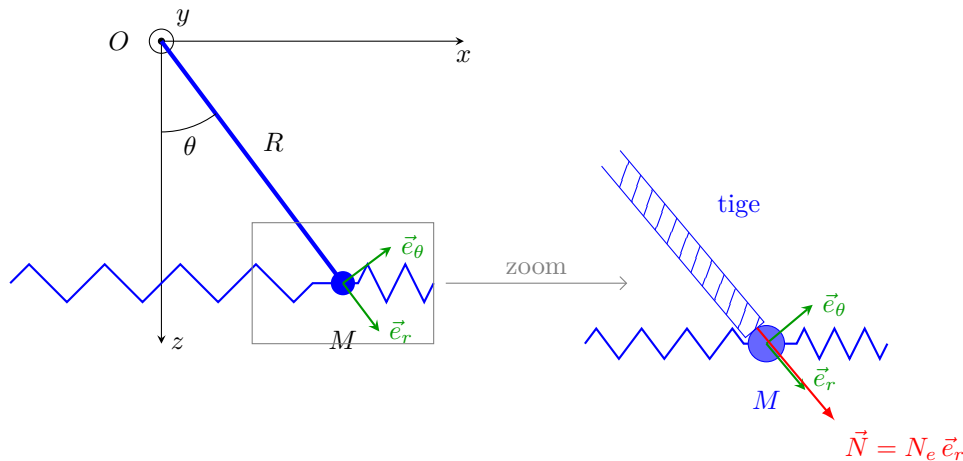
7. La force exercée par la corde sur les grimpeur est une force de rappel élastique. Elle est donc maximale lorsque l'allongement est lui-même maximal, on a donc $F_{max} = k\Delta l = mg \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}\right)$. Or $k = \frac{\alpha}{L_0}$ donc $hk = \frac{\alpha h}{L_0} = \alpha f$ où f est le facteur de chute défini dans l'énoncé. On en déduit

$$\boxed{F_{max} = mg \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\alpha f}{mg}}\right)}$$

8. L'approximation de la question 4. est valide pour $\Delta l \ll h$ soit $\sqrt{\frac{2mgh}{k}} \ll h$ ou $2mg \ll kh$. Comme $kh = \alpha f$, la condition se réécrit $f \gg \frac{2mg}{\alpha}$. A.N. : $f \gg \frac{2 \times 100 \times 10}{2 \cdot 10^4} = 0,1$
9. Pour $L_0 = 10$ m et $f = 1$, on trouve $\Delta l = 3,6$ m et $F_{max} = 7,4$ kN. Pour un facteur de chute égal à 2 on aurait $F_{max} = 10,0$ kN, ce qui est encore acceptable.
10. Ce cas apparaît catastrophique : la hauteur de chute est importante alors que la partie extensible de la corde est très réduite. C'est pourtant ce qui est utilisé dans le cas d'une excursion en *via ferrata*, mais le dispositif d'assurance utilisé est alors tout particulièrement conçu pour ce genre d'expédition : la fixation au harnais est un amortisseur.
A.N. : $f = 5$ ce qui donne $F_{max} = 15,2$ kN.

IX - Détermination et étude de positions d'équilibre

0. Pour comprendre comment la réaction normale de la tige peut être colinéaire à \overrightarrow{OM} tout en étant orthogonale à la tige, on zoome sur l'extrémité de la tige, qui a sans doute une dimension non nulle :



Les réponses à la question 7. permettront de mieux comprendre pourquoi cette question préliminaire était importante.

1. Ce système est évidemment conservatif. En effet les frottements sont négligés, le poids et la force de rappel des ressorts sont des forces que l'on sait conservatives et la réaction de la tige ne travaille pas (car en permanence perpendiculaire au déplacement du point M).

Remarque : ne pas confondre un fil et sa tension avec une tige rigide et sa réaction, cela n'a a priori rien à voir.

2. $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$ (car axe (Oz) orienté vers le bas)
donc $dE_{pp} = -\vec{P} \cdot d\overrightarrow{OM} = -mg\vec{e}_z \cdot (dx\vec{e}_x + dz\vec{e}_z) = -mgdz$ soit $E_{pp} = -mgz + \text{cste}$.
Or $E_{pp}(z = R) = 0$ donc $\text{cste} = mgR$ et $E_{pp} = mg(R - z)$.
3. La longueur du ressort A est $L_A = \frac{L}{2} + x$, celle du ressort B $L_B = \frac{L}{2} - x$. Comme tenu de l'orientation des ressorts, on a $\vec{F}_A = -k(L_A - l_0)\vec{e}_x$ et $\vec{F}_B = +k(L_B - l_0)\vec{e}_x$. En posant $a = \frac{L}{2} - l_0$, on a alors $\vec{F}_A(x) = -k(a + x)\vec{e}_x$ et $\vec{F}_B(x) = k(a - x)\vec{e}_x$.

Remarque : on retrouve $\vec{F}_A + \vec{F}_B = -2kx\vec{e}_x$, l'expression de la force exercée par deux ressorts « en série ».

4. Il s'agit de travaux finis entre la position centrale ($x = 0$) et la position actuelle.

$$\text{Donc } T_A = \int_{M(x=0)}^{M(x)} \vec{F}_A \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_{M(x=0)}^{M(x)} -k(a - x)\vec{e}_x \cdot (dx\vec{e}_x + dz\vec{e}_z) = \int_0^x -k(a - x)dx.$$

$$\text{Soit } T_A(x) = -\left(kax + \frac{kax^2}{2}\right).$$

$$\text{De la même façon, on a } T_B = \int_{M(x=0)}^{M(x)} \vec{F}_B \cdot d\overrightarrow{OM} \text{ qui donne } T_B(x) = kax - \frac{kax^2}{2}.$$

5. On a par définition $\Delta E_{pA} = -T_A$ ou encore $E_{pA}(x) - E_{pA}(0) = -T_A(x)$. Comme $E_{pA}(0) = 0$, on en déduit $E_{pA}(x) = \frac{kax^2}{2} + kax$.

Similairement, on trouve $E_{pB}(x) = \frac{kax^2}{2} - kax$

6. L'énergie potentielle totale est $E_{pT} = E_{pp} + E_{pA} + E_{pB}$ ce qui donne $E_{pT} = mg(R-z) + kx^2$. Or $x = R \sin \theta$ et $z = R \cos \theta$, on en déduit $E_{pT} = mgR(1 - \cos \theta) + kR^2 \sin^2 \theta$. En posant $\omega_1^2 = \frac{g}{R}$ et $\omega_2^2 = \frac{2k}{m}$, on trouve

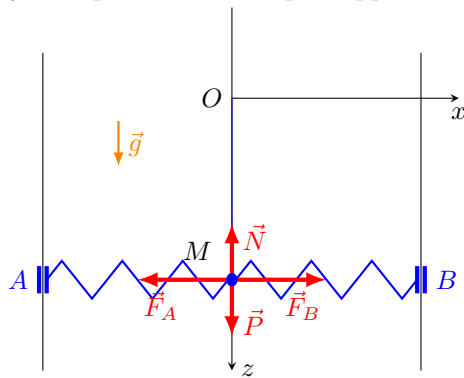
$$E_{pT}(\theta) = mR^2 \left[\omega_1^2(1 - \cos \theta) + \frac{\omega_2^2}{2} \sin^2 \theta \right]$$

7. Les positions d'équilibre de M sont données par $\frac{dE_{pT}}{d\theta} = 0$.

Or $\frac{dE_{pT}}{d\theta} = mR^2 [\omega_1^2 \sin \theta + \omega_2^2 \sin \theta \cos \theta] = mR^2 \sin \theta [\omega_1^2 + \omega_2^2 \cos \theta]$. Il faut donc $\sin \theta = 0$ ou $\cos \theta = -\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2$.

On a au minimum deux positions d'équilibre : $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \pi$, auxquelles se rajoutent deux autres à condition que $\frac{\omega_1}{\omega_2} \leq 1$: $\theta_3 = \arccos\left(-\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right)$ et $\theta_4 = -\arccos\left(-\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right)$.

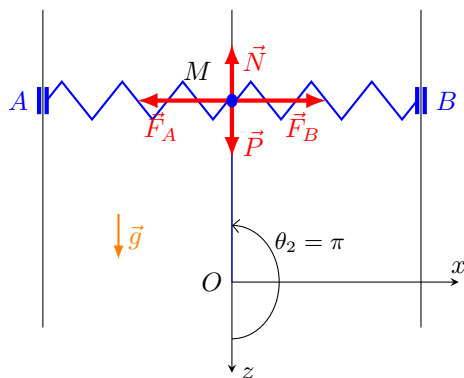
On peut représenter les forces dans chacune des positions d'équilibre, la position d'équilibre en θ_4 étant symétrique à celle en θ_3 par rapport à l'axe (Oz) , elle n'est pas représentée sur les schémas).



$\theta_1 = 0$:

$$\begin{cases} \vec{N} + \vec{P} = \vec{0} \\ \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0} \end{cases}$$

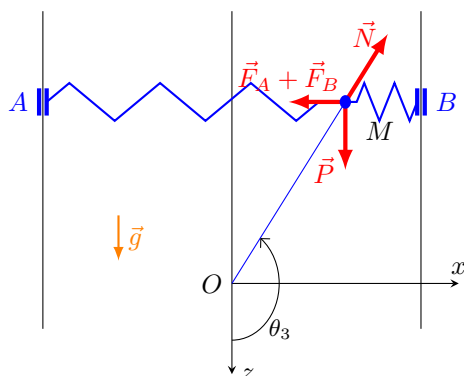
- La tige tire la masse vers le haut et compense le poids.
- Les effets des deux ressorts se compensent.



$\theta_2 = \pi$:

$$\begin{cases} \vec{N} + \vec{P} = \vec{0} \\ \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0} \end{cases}$$

- La tige pousse la masse vers le haut et compense le poids.
- Les effets des deux ressorts se compensent.



$\theta_3 = \arccos\left(-\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right)$ (si $\frac{\omega_1}{\omega_2} \leq 1$). $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$.

$$\text{On a } \begin{cases} \vec{F}_A + \vec{F}_B = -2kx \vec{e}_x = -2kR \sin \theta_3 \vec{e}_x \\ \vec{P} = mg \vec{e}_z \\ \vec{N} = N_x \vec{e}_x + N_z \vec{e}_z \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} N_z = -mg \\ N_x = 2kR \sin \theta_3 \end{cases}$$

Le poids et les effets des ressorts sont compensés par la tige qui pousse la masse vers le haut et vers la droite

8. Pour discuter la stabilité des positions d'équilibre, il faut trouver le signe de $\frac{d^2}{d\theta^2} E_{pT}$ au niveau de ceux-ci pour déterminer s'il s'agit d'un maximum (équilibre instable) ou d'un minimum (équilibre stable) de E_{pT} .

On calcule $\frac{d^2 E_{pT}}{d\theta^2} = mR^2 [\cos \theta (\omega_1^2 + \omega_2^2 \cos \theta) - \omega_2^2 \sin^2 \theta]$

□ Examinons le cas $\frac{\omega_1}{\omega_2} > 1$, il n'y a alors que deux positions d'équilibre :

- $\theta_1 = 0$ alors $\left(\frac{d^2 E_{pT}}{d\theta^2}\right)_{\theta_1=0} = mR^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) > 0$: équilibre stable.
- $\theta_2 = \pi$ alors $\left(\frac{d^2 E_{pT}}{d\theta^2}\right)_{\theta_2=\pi} = mR^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2) < 0$: équilibre instable.

□ Examinons le cas $\frac{\omega_1}{\omega_2} < 1$, il y a alors quatre positions d'équilibre :

- $\theta_1 = 0$ alors $\left(\frac{d^2 E_{pT}}{d\theta^2}\right)_{\theta_1=0} = mR^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) > 0$: équilibre stable.
- $\theta_2 = \pi$ alors $\left(\frac{d^2 E_{pT}}{d\theta^2}\right)_{\theta_2=\pi} = mR^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2) > 0$: équilibre stable.
- θ_3 ou θ_4 avec $\cos \theta_{3,4} = -\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}$ alors $\left(\frac{d^2 E_{pT}}{d\theta^2}\right)_{\theta_{3,4}} = mR^2 \left[-\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} (\omega_1^2 + \omega_2^2 \left(-\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right)) - \omega_2^2 \left(1 - \frac{\omega_1^4}{\omega_2^4}\right) \right]$
soit $\left(\frac{d^2 E_{pT}}{d\theta^2}\right)_{\theta_{3,4}} = -mR^2 \omega_2^2 \left(1 - \frac{\omega_1^4}{\omega_2^4}\right) < 0$: équilibre instable.

□ Examinons le cas $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 1$, il y a a priori quatre positions d'équilibre : $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ et θ_4 mais, comme $\cos \theta_3 = \cos \theta_4 = -\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = -1$, on en déduit $\theta_3 = \theta_4 = \theta_2 = \pi$

- $\theta_1 = 0$: on retrouve un équilibre stable.
- $\theta_3 = \theta_4 = \theta_2 = \pi$, on a alors $\frac{d^2 E_{pT}}{d\theta^2} = mR^2 \omega_1^2 (\cos \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = mR^2 \omega_1^2 (\cos \theta + 2 \cos^2 \theta - 1)$
et donc $\left(\frac{d^2 E_{pT}}{d\theta^2}\right)_{\theta=\pi} = 0$: l'équilibre est indéterminé. Pour lever l'indétermination, il faut continuer le développement limité jusqu'au premier ordre non nul.
 $\frac{d^3 E_{pT}}{d\theta^3} = mR^2 \omega_1^2 (-\sin \theta - 4 \sin \theta \cos \theta) = -mR^2 \omega_1^2 \sin \theta (1 + 4 \cos \theta)$ et donc $\left(\frac{d^3 E_{pT}}{d\theta^3}\right)_{\theta=\pi} = 0$.
 $\frac{d^4 E_{pT}}{d\theta^4} = -mR^2 \omega_1^2 [\cos \theta (1 + 4 \cos \theta) - 4 \sin^2 \theta] = -mR^2 \omega_1^2 [4 + \cos \theta - 8 \sin^2 \theta]$.
Soit $\left(\frac{d^4 E_{pT}}{d\theta^4}\right)_{\theta=\pi} = -3mR^2 \omega_1^2 < 0$.

L'approximation de $E_{pT}(\theta)$ au premier ordre non nul autour de $\theta = \pi$ s'écrit donc

$$E_{pT}(\theta) = E_{pT}(\pi) + \left(\frac{d^4 E_{pT}}{d\theta^4}\right)_{\theta=\pi} \frac{(\theta-\pi)^4}{4!} \text{ et donc } E_{pT}(\theta) - E_{pT}(\pi) = -\frac{mR^2 \omega_1^2}{8} (\theta - \pi)^4 < 0.$$

$\theta = \pi$ est donc un maximum de l'énergie potentielle, on en conclut que l'équilibre est instable.

On peut tracer le graphe de $E_{pT}(\theta)$ pour confirmer ces résultats (voir figure 1.1) : on retrouve bien les équilibres aux endroits prévus, les maximums correspondant à des équilibres instables et les minimums à des équilibres stables. Le Zoom fait autour de $\theta = \pi$ permet bien de confirmer l'instabilité de l'équilibre pour le cas $\omega_2 = \omega_1$.

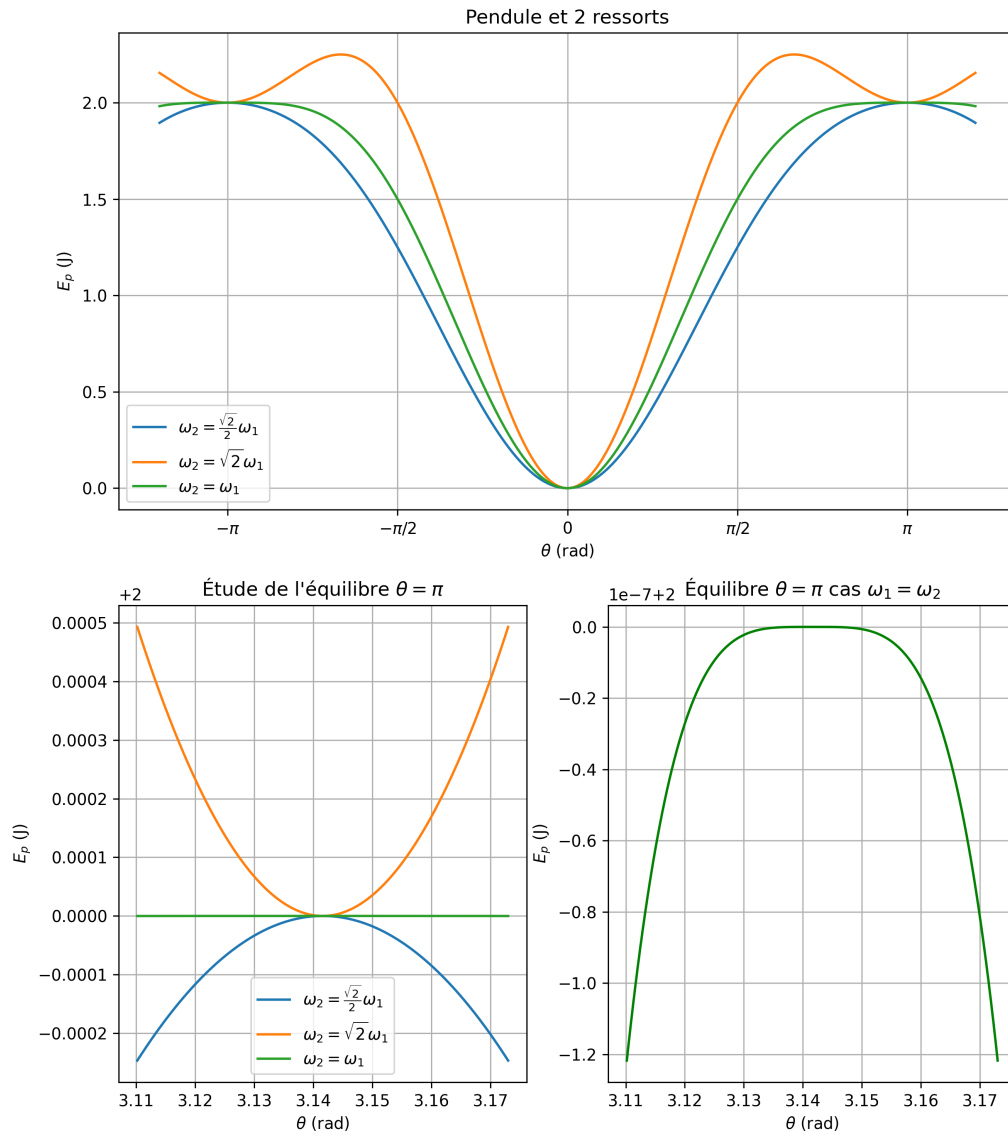


FIGURE 1.1 – Énergie potentielle totale du système pendule et 2 ressorts pour différentes valeurs de ω_1 et ω_2 . On vérifie bien qu'il y a 2 positions d'équilibre pour $\omega_2 \leq \omega_1$ et 4 pour $\omega_2 > \omega_1$. Le zoom autour de l'équilibre en $\theta = \pi$ permet de discuter de sa stabilité.