MI – TD 2

Dynamique du point

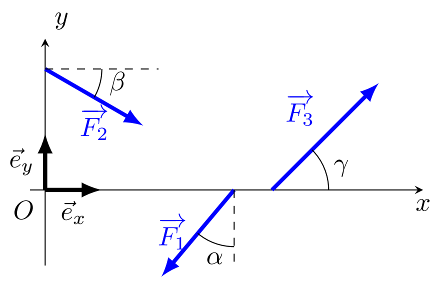
Conseils généraux

Avant de commencer un exercice de mécanique, il est plus que recommandé :

- de définir le système étudié,
- de définir un référentiel galiléen, cadre de l'étude,
- de faire un bilan exhaustif des forces s'exerçant sur le système,
- d'étudier les conditions initiales et les causes extérieures (forces) afin…
- …de déterminer les degrés de liberté et la nature de la trajectoire et de choisir une base de représentation (cartésienne, cylindrique, polaire, sphérique),
- d'exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération dans la base choisie,
- d'exprimer dans la base choisie toutes les actions ou forces s'exerçant sur le système.

I - Projections

Pour chacune des trois forces de la figure, déterminer ses composantes dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ en fonction de sa norme notée $\|\vec{F}_1\|$, $\|\vec{F}_2\|$ ou $\|\vec{F}_3\|$ et de l'angle α, β ou γ.



II - Lancer de balle

Une balle est lancée au bord du toit d'un immeuble dans une direction faisant un angle α au-dessus de l'horizontale.
Elle atterrit 5 secondes plus tard à 50 mètres du pied de l'immeuble.
Si la hauteur maximale est de 20 mètres au-dessus du toit, trouver la vitesse v_0 (en norme) avec laquelle elle a été lancée, et l'angle α avec lequel elle a été lancée. On négligera les frottements de l'air.

III - Poussée d'Archimède

III.1 - Liquides non miscibles

On considère le système suivant : deux liquides non miscibles dans un récipient en contact avec la pression atmosphérique. À l'équilibre, le fluide 1 de masse volumique ρ_1 est en haut et le fluide 2 de masse volumique ρ_2 est en bas. À partir de cette information *démontrer* que $\rho_1 < \rho_2$. Le raisonnement consiste à étudier ce qui se passerait pour une goutte du fluide 1 si elle se retrouvait immergée dans le fluide 2.

III.2 - Glaçon et eau liquide

Un glaçon de forme cylindrique (hauteur $h = 3{,}0\,\mathrm{cm}$, rayon $R = 2{,}0\,\mathrm{cm}$, température $t = 0{,}0\,°\mathrm{C}$) flotte à la surface d'une eau liquide à $0{,}0\,°\mathrm{C}$, l'axe du cylindre étant toujours perpendiculaire à la surface du liquide. On note a la hauteur de la glace qui est à l'air libre, l'air étant également à $0{,}0\,°\mathrm{C}$. On donne la masse volumique de l'eau liquide $\rho_\ell = 1{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ et celle de la glace $\rho_s = 0{,}92 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ à $0{,}0\,°\mathrm{C}$.

1. Déterminer le rapport $\frac{a}{h}$ (c'est-à-dire la partie émergée du glaçon).

2. Quelle force doit-on exercer verticalement avec l'extrémité d'une paille pour maintenir le glaçon à la lisière de la surface de l'eau ($a = 0$) ? Application numérique.
3. On admet que le récipient contenant l'eau et le glaçon est de forme cylindrique de section S. Que peut-on dire du niveau de l'eau une fois que le glaçon a totalement fondu ?

IV - Mouvement rectiligne avec frottement linéaire

On considère un pétrolier assimilable à un point matériel de masse m. Il est initialement animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v_0, maintenu grâce au moteur qui exerce une force de poussée $\overrightarrow{F_p}$. Il s'exerce sur lui une force de frottement fluide linéaire $\vec{f} = -h\vec{v}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse du bateau et h une constante positive.
On se place pour tout l'exercice dans un repère cartsésien $(Oxyz)$ où O est la position du pétrolier à l'instant $t = 0$, (Ox) est l'axe horizontal de même direction et sens que $\overrightarrow{v_0}$ et (Oy) l'axe vertical orienté vers le haut.

1. Donner l'expression de la force de poussée $\overrightarrow{F_p}$, puis sa valeur F_p.
2. À l'instant $t = 0$, on coupe le moteur. Exprimer $v(t)$ et $x(t)$. Donner l'expression et la valeur de la distance totale parcourue d et du temps caractéristique de l'équation du mouvement τ.
3. Déterminer les durées Δt_1, Δt_2 et Δt_3 nécessaires pour parcourir respectivement les distances $d/4$, $d/2$ et $3d/4$. Quel est le temps nécessaire pour parcourir la distance d ? Comment expliquez vous cela ?
4. On considère maintenant que, à l'instant $t = 0$, on inverse la poussée des moteurs plutôt que de les arrêter. En déduire le temps t_a et la distance d_a d'arrêt.

Données : $m = 120 \cdot 10^3$ t, $v_0 = 8{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $h = 1{,}5 \cdot 10^5\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$

V - Mouvement de chute avec frottement linéaire

On veut déterminer le mouvement d'un projectile sphérique de masse m, de rayon 1 mm et de masse volumique $\rho = 8 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. On néglige tout mouvement de rotation du projectile qui sera aussi considéré indéformable. Il est lancé dans l'air à partir de O, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale. La résistance de l'air crée sur le projectile une force de frottement fluide linéaire $\vec{f} = -k\,\vec{v}$ où $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ est la vitesse du projectile (on suppose que l'air est au repos dans le référentiel d'étude).

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par le vecteur-vitesse $\vec{v}$.
2. Déterminer l'expression de $\vec{v}(t)$ et en déduire l'expression de la vitesse limite $\vec{v}_l$ du projectile.
3. Déterminer l'expression de $\overrightarrow{OM}(t)$.
4. En déduire l'expression de x_l, abscisse limite que peut atteindre le projectile.
5. Esquisser la trajectoire.

VI - Brique sur un plan incliné

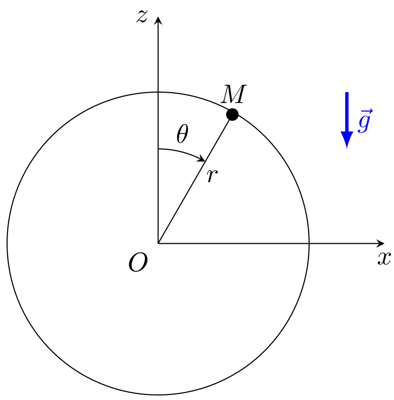
On considère une brique supposée ponctuelle de masse $m = 500$ g sur un support plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On néglige les frottements fluides avec l'air.

1. Dans un premier temps, on néglige les frottements solides et on considère l'expérience où la brique est lancée le long du plan incliné, vers le haut avec une vitesse $v_0 = 1,5$ m.s^{-1}. Déterminer l'instant auquel la brique s'arrête et la distance qu'elle a parcourue. Redescend-elle ?
2. On prend en compte désormais les frottements solides, avec un coefficient de frottement dynamique $\mu_d = 0,2$. Déterminer l'instant auquel la brique s'arrête et la distance qu'elle a parcourue.
3. On continue avec les hypothèses de la question précédente, on donne en plus le coefficient de frottement statique $\mu_s = 0,2$. La brique a atteint son point culminant et s'arrête. Pour quel angle redescend-elle ?
4. Dans le cas où la brique redescend, établir les équations horaires du mouvement.

VII - Glissement sur une calotte sphérique

Un point matériel M de masse m est lâché sans vitesse initiale en un point très proche du sommet d'une sphère de rayon R sur laquelle il glisse sans frottement. Déterminer la position et la vitesse du point matériel au moment où il quitte la sphère.

Angle initial : $\theta(t=0) = \varepsilon \approx 0$.



VIII - Bille sur une tige en rotation

Une bille considérée comme un point matériel de masse M peut coulisser sans frottement le long d'une tige rigide horizontale. La tige, de longueur a, est en rotation à vitesse angulaire constante $\Omega = \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ autour d'un axe vertical fixe dans le laboratoire.
La bille est abandonnée sans vitesse initiale par rapport à la tige à une distance $\frac{a}{2}$ de l'axe de rotation.

1. Déterminer en fonction de Ω, l'instant t_1 auquel la bille arrive au bout de la tige.
2. Déterminer l'expression du vecteur $\vec{R}$ définissant la force de réaction qu'exerce la tige sur la bille au cours du mouvement.
3. On considère que la tige se déforme irréversiblement (on parle de déformation plastique) si le module de la force exercée par la bille sur la tige est supérieure à une limite appelée limite élastique et notée F_{max}. Déterminer l'instant $t_{\text{plastique}}$ en fonction de M, a et Ω (en supposant que la tige est assez longue pour avoir $t_{\text{plastique}} < t_1$).

IX - Fusée

On étudie le mouvement dans un référentiel galiléen d'une fusée de masse totale $m(t)$ et de vitesse $\overrightarrow{v}(t)$ à l'instant t. Elle éjecte des gaz à vitesse relative $\overrightarrow{u}$ constante (de norme $u = 3000\,\mathrm{m\,s^{-1}}$) par rapport à la fusée, avec un débit massique $D_m = 60\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$. La résultante des forces extérieures exercées sur la fusée est notée $\overrightarrow{R}$.

1. En effectuant un bilan de quantité de mouvement entre les instants t et $T + \mathrm{d}t$ sur un système fermé, montrer que $m(t)\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{R} + \vec{T}$ où $\vec{T}$ est la force de poussée due à l'éjection des gaz que vous exprimerez en fonction de D_m et $\overrightarrow{u}$.
2. On considère une fusée se déplaçant dans le vide, en l'absence de pesanteur ; les masses initiale et finale de cette fusée sont m_i et m_f ; $\overrightarrow{u}$ et $\vec{v}(t)$ ont la même direction fixe. Exprimer l'accroissement de vitesse $\Delta v = v_f - v_i$ en fonction de m_i, m_f et u.
3. On se place maintenant sur une planète supposée sans atmosphère, générant un champ de pesanteur $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{e_z}$ supposé constant. À $t = 0$, une fusée de masse initiale m_0 et initialement immobile située en O est mise à feu et commence à s'élever verticalement. Établir les expressions de la vitesse $v(t)$ et de l'altitude $z(t)$ en fonction du temps, de m_0, g, u et D_m.