

Correction MI – TD 2

Dynamique du point

I - Projections

Pour un vecteur \vec{F} quelconque, l'écriture dans une base orthonormée quelconque $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est :

$$\vec{F} = (\vec{F} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{F} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 + (\vec{F} \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_3$$

avec $\vec{F} \cdot \vec{e}_i = \|\vec{F}\| \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{e}_i})$.

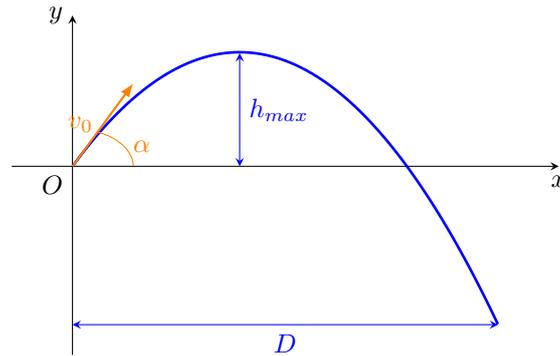
Pour le vecteur \vec{F}_1 , on obtient : $\vec{F}_1 = \|\vec{F}_1\| \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) \vec{e}_x + \|\vec{F}_1\| \cos(\pi - \alpha) \vec{e}_y$

d'où : $\vec{F}_1 = -\|\vec{F}_1\| \sin(\alpha) \vec{e}_x - \|\vec{F}_1\| \cos(\alpha) \vec{e}_y$

De même : $\vec{F}_2 = \|\vec{F}_2\| \cos(\beta) \vec{e}_x - \|\vec{F}_2\| \sin(\beta) \vec{e}_y$ et $\vec{F}_3 = \|\vec{F}_3\| \cos(\gamma) \vec{e}_x + \|\vec{F}_3\| \sin(\gamma) \vec{e}_y$

II - Lancer de balle

On étudie le mouvement de la balle dans le référentiel Terrestre supposé galiléen. On se place dans le repère $(Oxyz)$ où O est la position initiale de la balle, (Oy) l'axe vertical dirigé vers le haut et (Ox) l'axe horizontal contenant la composante horizontale de la vitesse initiale. Le mouvement est plan contenu dans le plan (Oxy) . Comme on néglige les frottements, la seule force qui s'applique sur le système est son poids $\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{u}_y$.



On retrouve rapidement, en appliquant le principe fondamental de la dynamique et en utilisant les conditions initiales ($M(t = 0) = O$ et $\vec{v}(t = 0) = \vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \vec{u}_x + v_0 \sin \alpha \vec{u}_y$), les formules de la chute libre sans frottements vues en cours :

- $\vec{v}(t) = v_0 \cos \alpha \vec{u}_x + (-gt + v_0 \sin \alpha) \vec{u}_y$
- $x(t) = (v_0 \cos \alpha)t$ et $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t$

On peut maintenant utiliser les informations données par l'énoncé :

- on sait que $x(t_c) = D$ avec $t_c = 5$ s et $D = 50$ m soit $v_0 \cos \alpha = \frac{D}{t_c}$
- la flèche de la trajectoire, c'est-à-dire l'altitude maximale est $h_{max} = 20$ m. Elle est atteinte quand $v_y = 0$ soit à l'instant $t_f = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$. On en déduit $h_{max} = y(t_f) = -\frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g} + \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{g}$ d'où $v_0 \sin \alpha = \sqrt{2gh_{max}}$.
- La vitesse initiale est alors donnée par $v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha = v_0^2 = \frac{D^2}{t_c^2} + 2gh_{max}$ soit $v_0 = \sqrt{\frac{D^2}{t_c^2} + 2gh_{max}}$.
- Par ailleurs on a $\frac{v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} = \tan \alpha = \frac{\sqrt{2gh_{max}} t_c}{D}$ soit $\alpha = \arctan\left(\frac{\sqrt{2gh_{max}} t_c}{D}\right)$.

A.N. : $v_0 = \sqrt{\frac{50^2}{5^2} + 2 \times 10 \times 20} = \sqrt{500} = 22,4 \text{ m s}^{-1}$ et $\alpha = \arctan\left(\frac{\sqrt{2 \times 10 \times 20} \times 5}{50}\right) = \arctan(2) = 63,4^\circ$

Remarque : on pourrait également en déduire la hauteur h de l'immeuble en écrivant $h = -y(t_c)$.

III - Poussée d'Archimède

III.1 - Liquides non miscibles

On pose $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ avec $g > 0$ (l'axe (Oz) est donc orienté vers le haut). Si une goutte du fluide 1 de volume V est entièrement immergée dans le fluide 2, elle subit principalement deux forces : son poids $\vec{P} = -\rho_1 V \vec{e}_z$ et la poussée d'Archimède due au volume de fluide 2 déplacé $\vec{\Pi} = \rho_2 V^* \vec{e}_z$, avec $V^* = V$ puisque la goutte de fluide 1 est entièrement immergée, donc $\vec{\Pi} = \rho_2 V \vec{e}_z$. La résultante de ces deux forces est $(\rho_2 - \rho_1)g\vec{e}_z$. Or, on sait qu'à l'équilibre le fluide 1 est au-dessus du fluide 2, donc si une goutte de fluide 1 est immergée dans le fluide 2 elle aura tendance à remonter ce qui veut dire que la résultante des forces qu'elle subit est vers le haut et donc que $(\rho_2 - \rho_1)g > 0$ d'où $\rho_2 > \rho_1$. CQFD.

III.2 - Glaçon et eau liquide

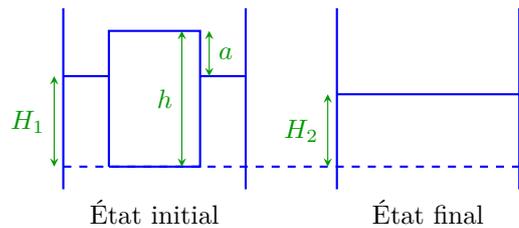
- On étudie le glaçon. On néglige la poussée d'Archimède due à l'air car $\rho_{\text{air}} \ll \rho_s$ mais pas la poussée d'Archimède due à l'eau liquide. Le volume du glaçon est $V = \pi R^2 h$. Le volume d'eau déplacée est $V^* = \pi R^2 (h - a)$. On écrit que la résultante des forces est nulle à l'équilibre et on trouve : $\frac{a}{h} = 1 - \frac{\rho_s}{\rho_\ell}$.

A.N. : $\frac{a}{h} = 1 - \frac{0,92 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}}{1,0 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}} = 0,080 = 8\%$.

- On cherche l'équilibre pour $a = 0$. On trouve $\vec{F}_{\text{paille}} = (\rho_s - \rho_\ell)g\pi R^2 h \vec{e}_z$.

A.N. : $\|\vec{F}_{\text{paille}}\| = (1,0 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} - 0,92 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}) \times 9,8 \text{ N kg}^{-1} \times \pi \times (2 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 \times 3 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 0,030 \text{ N}$

- On étudie le système constitué de l'eau et la glace situés au-dessus de la face inférieure du glaçon. On définit un état initial est où le glaçon est encore là, l'eau atteint alors une hauteur H_1 par rapport au bas du glaçon, et un état final où le glaçon a complètement fondu, l'eau atteint alors une hauteur H_2 par rapport au bas du glaçon. On appellera $S_g = \pi R^2$ la section du glaçon et S la section du récipient.



On fait un bilan de matière entre l'instant initial et final :

- À l'instant initial, la masse totale est la masse de l'eau m_ℓ plus la masse du glaçon m_g avec $m_g = \rho_s S_g h$ et $m_\ell = \rho_\ell (S - S_g) H_1$. Comme $H_1 = h - a$, on a $m_1 = \rho_\ell S H_1 + S_g [\rho_s h - \rho_\ell (h - a)]$. Or on a vu précédemment que $\rho_\ell a = (\rho_\ell - \rho_s)h$, on trouve alors que le terme entre crochets dans l'expression précédente est nul et donc $m_1 = \rho_\ell S H_1$.
- À l'instant final, on n'a plus que de l'eau, et donc $m_2 = \rho_\ell S H_2$.

Le système étudié étant fermé, on peut écrire la conservation de la masse : $m_1 = m_2$, ce qui mène à $H_1 = H_2$. Le niveau de l'eau dans le récipient reste stable une fois le glaçon fondu.

IV - Mouvement rectiligne avec frottements fluides linéaires

Exceptionnellement, on explicite la démarche intellectuelle complète permettant d'anticiper la nature de la trajectoire. Cette rédaction n'est pas nécessairement indispensable dans une copie, mais le raisonnement doit être mené pour être sûr de choisir correctement la base de représentation du mouvement.

- On étudie le pétrolier, supposé ponctuel en M et de masse m , soumis à des frottements fluides.
- On travaille dans le référentiel terrestre (\mathcal{R}_T) , dans lequel la droite horizontale, support du mouvement, est fixe.
- Les forces à prendre en compte sont : le poids, la poussée d'Archimède, les forces de frottements fluides et la pousée du moteur.
- Le poids et la pousée d'Archimède sont verticaux. Les frottements fluides sont toujours colinéaires à la vitesse qui est horizontale. Initialement, la trajectoire est donc contenue dans le plan (\vec{P}, \vec{v}_0) . Aucune force ne possède une composante en dehors de ce plan, le mouvement restera donc toujours dans ce plan. D'autre part, l'énoncé indique que le support du mouvement est une droite, donc le mouvement est rectiligne, ce qui est compatible avec l'étude menée précédemment.

- On choisit un repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, cartésien dans (\mathcal{R}_T) , avec (O, \vec{e}_x) le long du mouvement et \vec{e}_y vertical vers le haut.
- On a donc : $\vec{OM}(t) = x(t)\vec{e}_x$; $\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{e}_x$; $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{e}_x$.
- On a également : $\vec{P} = -mg\vec{e}_y$, $\vec{\Pi} = m^*\vec{e}_y$ et $\vec{f} = -h\dot{x}\vec{e}_x$.

L'étude préliminaire est terminée.

1. On applique la RFD à M dans (\mathcal{R}_T) . On obtient : $\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} + \vec{F}_p = m\vec{a} = \vec{0}$ car le pétrolier est initialement animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Comme \vec{P} et $\vec{\Pi}$ sont uniquement verticaux et \vec{f} et \vec{F}_p uniquement horizontaux, on en déduit $\vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0}$ et $\vec{f} + \vec{F}_p = \vec{0}$ soit $\boxed{\vec{F}_p = hv_0\vec{e}_x}$.
A.N. : $F_p = 1,2 \cdot 10^6$ N.
2. On a maintenant, puisque $\vec{F}_p = \vec{0}$, $\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} + \vec{F}_p = m\vec{a} = m\ddot{x}\vec{e}_x$. En projetant sur l'axe (Ox) , on obtient l'équation différentielle suivante : $\ddot{x} = -\frac{h}{m}\dot{x}$.

Il y a deux façons de résoudre cette équation, afin de répondre à la question posée.

Méthode 1 On peut la réécrire : $\frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{h}{m}\frac{dx}{dt}$ ou encore, en simplifiant par dt : $d\dot{x} = -\frac{h}{m}dx$.

Soient t_i et t_f les instants respectivement initial et final. On intègre l'équation précédente :

$$\int_{\dot{x}(t_i)}^{\dot{x}(t_f)} d\dot{x} = -\frac{h}{m} \int_{x(t_i)}^{x(t_f)} dx$$

d'où

$$\dot{x}(t_f) - \dot{x}(t_i) = -\frac{h}{m}(x(t_f) - x(t_i))$$

Étant donné que $\dot{x}(t_f) = 0$, que $\dot{x}(t_i) = v_0$ et que $d = x(t_f) - x(t_i)$, on a finalement :

$$\boxed{d = \frac{mv_0}{h}} = \frac{120 \cdot 10^6 \times 8}{1,5 \cdot 10^5} = 6,4 \text{ km}$$

Méthode 2 On s'aperçoit que l'équation $\ddot{x} = -\frac{h}{m}\dot{x}$ est une équation différentielle linéaire à coefficient constant du premier ordre en $\dot{x} = v$, qui se résout, compte tenu de la condition initiale $v(t_i) = v_0$, en :

$$\forall t \geq t_i, v(t) = v_0 e^{-\frac{h}{m}(t-t_i)}$$

En intégrant le résultat précédent par rapport au temps entre t_i et t , on trouve :

$$\forall t \geq t_i, x(t) - x(t_i) = \frac{mv_0}{h} \left(1 - e^{-\frac{h}{m}(t-t_i)}\right)$$

On a évidemment la distance parcourue à l'instant t qui est $x(t) - x(t_i)$. La distance totale parcourue est

$$d = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x(t_i)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{mv_0}{h} \left(1 - e^{-\frac{h}{m}(t-t_i)}\right) = \frac{mv_0}{h}$$

3. On note $d_1 = d/4$, $d_2 = d/2$ et $d_3 = 3d/4$. D'après l'étude menée à la question précédente, on a de façon générale le temps $\Delta t = t - t_i = -\frac{m}{h} \ln \left(1 - \frac{h}{mv_0}(x(t) - x(t_i))\right) = -\frac{m}{h} \ln \left(1 - \frac{1}{4}(x(t) - x(t_i))\right)$, $x(t) - x(t_i)$ étant la distance parcourue. On a donc :

$$\boxed{\Delta t_1 = -\frac{m}{h} \ln \left(\frac{3}{4}\right)} = 230 \text{ s} \quad \boxed{\Delta t_2 = -\frac{m}{h} \ln \left(\frac{1}{2}\right)} = 555 \text{ s} \quad \boxed{\Delta t_3 = -\frac{m}{h} \ln \left(\frac{1}{4}\right)} = 11 \cdot 10^2 \text{ s}$$

Pour une distance $d = \frac{mv_0}{h}$, on trouve $t \rightarrow \infty$. C'est logique compte tenu du modèle de frottement utilisé : les frottements étant linéaires, plus la vitesse est faible plus les frottements sont faibles ; les frottements tendent vers zéro et le mobile met un temps infini à s'arrêter. La méthode 2 met se résultat en évidence ($\forall t \geq t_i, \dot{x}(t) = v_0 e^{-\lambda(t-t_i)}$, fonction qui ne s'annule jamais).

1. m^* est la masse de fluide déplacé, qu'on peut assimiler, en négligeant la poussée d'Archimède dans l'air à la masse d'eau déplacée

4. Si on inverse la poussée des moteurs, on ajoute une force $\vec{F}_p = -hv_0 \vec{e}_x$ au bilan des forces. La relation fondamentale de la dynamique donne alors, en ne regardant que la projection sur l'axe (Ox) ,

$$m\ddot{x} = -h\dot{x} - hv_0 \quad \text{soit} \quad \dot{v} + \frac{h}{m}v = -\frac{h}{m}v_0$$

En appliquant la seconde méthode et en utilisant la condition initiale $\dot{x}(t=0) = v(0) = v_0$, on obtient $v(t) = v_0 \left(2e^{-\frac{h}{m}t} - 1 \right)$

En intégrant ce résultat et en prenant $x(t=0) = 0$, on trouve : $x(t) = \frac{2mv_0}{h} \left(1 - e^{-\frac{h}{m}t} \right) - v_0 t$

Le temps d'arrêt t_a est donné par $v(t_a) = 0$ soit $t_a = \frac{m}{h} \ln 2 = 555 \text{ s}$.

La distance d'arrêt d_a est donnée par $d_a = x(t_a)$ soit $d_a = \frac{mv_0}{h} (1 - \ln 2) = 2,0 \text{ km}$.

V - Mouvement de chute avec frottement linéaire

- système : bille supposée ponctuelle (petite dimension, peu déformable) située en M ;
- étude menée dans le référentiel terrestre noté (\mathcal{R}) , supposé galiléen et dans lequel le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est cartésien ;
- le système est soumis à son poids et aux frottements fluides dus à l'air et dont le sens est opposé au vecteur vitesse ; on néglige la poussée d'Archimède car $\rho_{acier} \gg \rho_{air}$;
- initialement, la trajectoire est tangente à (O, \vec{v}_0) . La résultante des forces, et donc le vecteur accélération, est toujours comprise dans le plan (\vec{g}, \vec{v}) où \vec{v} est le vecteur vitesse de M dans (\mathcal{R}) . Le mouvement est donc plan et contenu dans (\vec{g}, \vec{v}_0) ; le système a deux degrés de liberté si $\alpha \neq 0$, ce qu'on supposera pour la généralité de la résolution ;
- si on choisit un axe, par exemple (O, \vec{e}_z) , colinéaire à \vec{g} , il suffit de choisir (O, \vec{e}_x) de façon que $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0$ appartienne au plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ pour que le mouvement soit toujours inclus dans ce plan ;
- $\forall t, \vec{OM} = x \vec{e}_x + z \vec{e}_z$; $\forall t, \vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{z} \vec{e}_z$; $\forall t, \vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{z} \vec{e}_z$;
- on fait un schéma (voir fin de l'exercice) ;
- expression du poids : $\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{e}_z$;
- expression des frottements fluides : $\vec{f} = -k (\dot{x} \vec{e}_x + \dot{z} \vec{e}_z)$.

On applique la RFD (2^e loi de Newton) à M dans le référentiel (\mathcal{R}) :

$$\forall t, m \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{f}$$

d'où

$$\forall t, \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m} \vec{v} = -g \vec{e}_z$$

On identifie facilement le temps de relaxation $\tau = \frac{m}{k}$, pour en déduire la forme standardisée :

$$\forall t, \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -g \vec{e}_z$$

- On résout l'équation précédente qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la fonction vectorielle \vec{v} , à coefficients constants et à second membre stationnaire.

La solution homogène de cette équation est $\vec{v}_{SH}(t) = \vec{A} e^{-\frac{t}{\tau}}$.

On choisit une solution particulière stationnaire, $\vec{v}_{SP}(t) = \vec{K}$. On détermine \vec{K} en réinjectant cette solution dans l'équation différentielle :

$$\forall t, \frac{d\vec{K}}{dt} + \frac{\vec{K}}{\tau} = -g \vec{e}_z$$

or \vec{K} est stationnaire donc, finalement, $\vec{K} = -g\tau \vec{e}_z$.

On forme la solution générale $\forall t, \vec{v}(t) = \vec{A} e^{-\frac{t}{\tau}} - g\tau \vec{e}_z$.

On détermine \vec{A} grâce à la condition initiale :

$$\text{pour } t = 0, \vec{v}_0 = \vec{A} - g\tau \vec{e}_z \text{ d'où } \vec{A} = \vec{v}_0 + g\tau \vec{e}_z$$

Finalement,

$$\forall t \geq 0, \vec{v}(t) = (\vec{v}_0 + g\tau \vec{e}_z) e^{-\frac{t}{\tau}} - g\tau \vec{e}_z$$

et

$$\vec{v}_\ell = \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{v} = -g\tau \vec{e}_z, \text{ vitesse verticale et vers le bas}$$

3. Pour déterminer $\overrightarrow{OM}(t)$ on intègre le vecteur vitesse par rapport au temps puisque celui-ci est la dérivée temporelle de la position :

$$\forall t \geq 0, \overrightarrow{OM}(t) - \overrightarrow{OM}(t=0) = \int_{M(t=0)}^{M(t)} d\overrightarrow{OM} = \int_{t=0}^t \vec{v}(t) dt = \int_{t=0}^t ((\vec{v}_0 + g\tau \vec{e}_z) e^{-\frac{t}{\tau}} - g\tau \vec{e}_z) dt$$

$$\forall t \geq 0, \overrightarrow{OM}(t) - \overrightarrow{OM}(t=0) = (\vec{v}_0 + g\tau \vec{e}_z) \int_{t=0}^t e^{-\frac{t}{\tau}} dt - g\tau \vec{e}_z \int_{t=0}^t dt$$

$$\forall t \geq 0, \overrightarrow{OM}(t) - \overrightarrow{OM}(t=0) = (\vec{v}_0 + g\tau \vec{e}_z) \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) - g\tau t \vec{e}_z$$

Or, à $t = 0$, le point M est en O donc $\overrightarrow{OM}(t=0) = \overrightarrow{OO} = \vec{0}$ et finalement :

$$\forall t \geq 0, \overrightarrow{OM}(t) = (\vec{v}_0 + g\tau \vec{e}_z) \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) - g\tau t \vec{e}_z$$

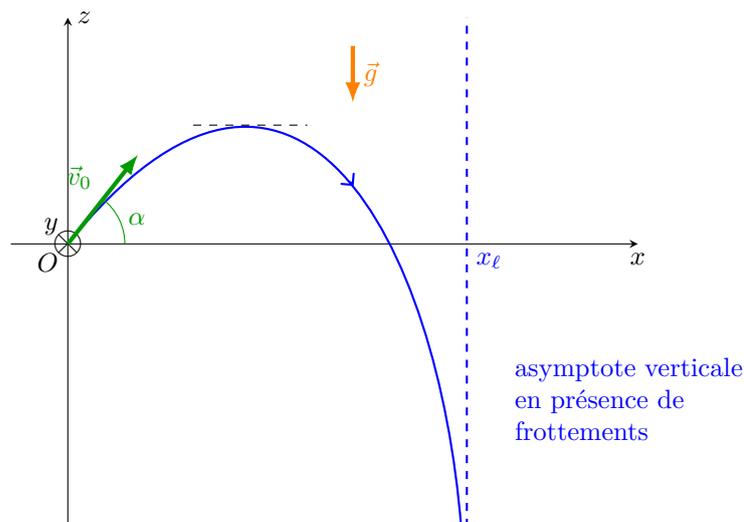
4. On en déduit

$$\forall t \geq 0, x(t) \equiv \overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_x = v_0 \cos(\alpha) \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

et donc

$$x_\ell = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = v_0 \cos(\alpha) \tau$$

5. Esquisse de la trajectoire.



VI - Brique sur un plan incliné

- Le système étudié est la brique, l'étude étant menée dans le référentiel terrestre noté (\mathcal{R}) , supposé galiléen.
- On travaille dans le repère $(Oxyz)$ où O est la position initiale de la brique, (Ox) l'axe du plan incliné et (Oy) choisi de tel façon que le plan (xOy) soit vertical (l'axe (Oz) sera alors horizontal), voir schéma ci-dessous.
- Le mouvement sera rectiligne le long de l'axe (Ox) , on aura donc $\forall t, \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x, \vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x, \vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$.
- Les forces s'exerçant sur le système sont le poids \vec{P} et la réaction du support \vec{R} .
 - expression du poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg \sin \alpha \vec{e}_x - mg \cos \alpha \vec{e}_y$;
 - expression de la réaction du support : $\vec{R} = R_x\vec{e}_x + R_y\vec{e}_y$ avec $R_x = \pm T$ et $R_y = N$.
- Le mouvement ayant lieu selon l'axe (Ox) , on aura toujours $\sum F_y = 0$ soit $N = mg \cos \alpha$.

1. Si on néglige les frottements solides $T = 0$. L'équation du mouvement, obtenue en projetant la RFD sur l'axe \vec{e}_x est : $\ddot{x} = -g \sin \alpha$.

On intègre une première fois pour obtenir l'expression de la vitesse : $\dot{x}(t) = -g \sin \alpha t + v_0$, puis une seconde fois pour trouver la position : $x(t) = -\frac{1}{2}g \sin \alpha t^2 + v_0 t$.

L'instant d'arrêt t_1 est donné par $\dot{x}(t_a) = 0$ soit $t_1 = \frac{v_0}{g \sin \alpha}$. La distance parcourue d_1 est donnée par

$$x(t_1) = d_1 \text{ soit } d_1 = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha}.$$

Une fois la brique arrêtée, on a $\sum \vec{F} = -mg \sin \alpha \vec{e}_x \neq \vec{0}$, il ne s'agit donc pas d'une position d'équilibre et la brique va repartir dans la direction $-\vec{e}_x$ (donc redescendre).

2. On a maintenant des frottements solides donc $T \neq 0$. On est en présence de frottements dynamiques puisque $\vec{v}_r = \vec{v} \neq \vec{0}$, donc $T = \mu_d N = \mu_d mg \cos \alpha$ et $R_x = -T$ car les frottements s'opposent au mouvement. La nouvelle équation du mouvement est alors $\ddot{x} = -g(\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha)$. En reprenant la même démarche que précédemment, on aboutit au nouvel instant d'arrêt $t_2 = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha)}$ et à

$$\text{la nouvelle distance parcourue } d_2 = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha)}.$$

3. Une fois à l'arrêt, on passe en situation de frottement statique. Si la brique reste immobile, on a $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$, et donc $R_x = T = mg \sin \alpha$. On reste en statique tant que $T < \mu_s N$, ce qui mène à $\tan \alpha < \mu_s$ soit $\alpha < \alpha_\ell = \arctan(\mu_s)$.

4. Une fois la redescente amorcée, on repasse en situation de frottement dynamique. On retrouve la même équation du mouvement qu'à la question 2. à la différence que, le mouvement ayant lieu vers les x décroissants, la composante en x de \vec{R} est maintenant dirigée vers le haut, on a donc $R_x = +T = \mu_d mg \cos \alpha$. Les conditions initiales sont également différentes puisqu'on a (en prenant un nouvel instant initial au début de la redescente) $x(0) = d_2$ et $\dot{x}(0) = 0$. On obtient alors $\ddot{x}(t) = -g(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha)$, $\dot{x}(t) = -g(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha)t$ et $x(t) = -\frac{1}{2}g(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha)t^2 + d_2$.

VII - Glissement sur une calotte sphérique

On travaille dans le référentiel (R) du laboratoire dans lequel (O, x, y, z) est cartésien.

Remarque préalable : le sommet de la sphère est une position d'équilibre instable évidente pour le point matériel. C'est le fait que le point soit initialement positionné en une position très proche du sommet, mas non-confondue avec celui-ci, qui explique le mouvement.

Analyse préliminaire :

- le poids est toujours colinéaire à \vec{e}_z ;
- la réaction du support est normale au support (pas de frottement) et toujours colinéaire à $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$; initialement elle est portée par un vecteur $\vec{e}_r(t=0)$ qui avec \vec{e}_z forme le plan initial des forces ;

2. On peut également obtenir ces deux résultats en remplaçant directement le coefficient $\sin \alpha$ par $\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha$ car, à ce coefficient près, les deux équations sont identiques et les conditions initiales sont les mêmes.

— la vitesse initiale est nulle.

Donc rien dans les conditions initiales, ni dans les causes de transformation du mouvement (forces) ne permet à l'objet de quitter le plan initial $(O, \vec{e}_r(t=0), \vec{e}_z)$. Le mouvement est donc plan et le problème est polaire. On travaille dans $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_y)$ avec \vec{e}_θ orienté dans le sens d'augmentation de θ .

Si la vitesse initiale avait été non-nulle et colinéaire au plan initial $(O, \vec{e}_r(t=0), \vec{e}_z)$, le mouvement aurait été tout de même plan.

Pour que le problème soit sphérique, il faudrait que la vitesse initiale soit non-nulle *et* qu'elle ne soit pas colinéaire au plan initial $(O, \vec{e}_r(t=0), \vec{e}_z)$. Dans ce cas, l'inertie initiale de l'objet impose un mouvement qui n'est pas contenu dans le plan des forces : le mouvement n'est plus plan, une base polaire n'est plus adaptée. Le mouvement étant alors centré autour d'un point fixe (O) , la base sphérique est la plus adaptée.

Cinématique, tant que le point est en contact avec la sphère (r stationnaire) :

- $\vec{OM} = r \vec{e}_r$.
- $\vec{v}_{M/R} = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$.
- $\vec{a}_{M/R} = -r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$.

Bilan des forces :

- Poids : $\vec{P} = -mg \vec{e}_z = -mg(\cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta)$.
- Réaction de la sphère, d'axe (O, \vec{e}_r) , sans frottement solide : $\vec{R} = N_r \vec{e}_r$.

On applique la RFD à l'objet, dans (R) , puis on projette sur les axes. On obtient, tant que le point est en contact avec la sphère (r stationnaire) :

$$\forall t, \begin{cases} -m \dot{\theta}^2 r &= N_r(\theta) - mg \cos(\theta) \\ m r \ddot{\theta} &= mg \sin(\theta) \end{cases}$$

Traduction de l'énoncé : on cherche « la position et la vitesse du point matériel au moment où il quitte la sphère », ce qui revient à chercher l'angle θ_f d'annulation de la réaction du support $N_r(\theta_f) = 0$. La réaction du support est l'inconnue du problème : l'équation du mouvement libre de cette inconnue est donc la deuxième équation qu'il faut d'abord résoudre pour répondre à la question posée.

- On multiplie cette équation par $\dot{\theta}$ à gauche et à droite : $m r \ddot{\theta} \dot{\theta} = m g \sin(\theta) \dot{\theta}$
- On identifie les dérivées temporelles : $m r \frac{1}{2} \frac{d(\dot{\theta}^2)}{dt} = m g \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt}$
- On simplifie par dt : $\frac{1}{2} m r d(\dot{\theta}^2) = m g \sin(\theta) d\theta$
- On intègre entre la situation initiale et la situation courante : $\int_{\dot{\theta}(t=0)}^{\dot{\theta}} \frac{1}{2} m r d(\dot{\theta}^2) = \int_{\theta(t=0)}^{\theta} m g \sin(\theta) d\theta$

On obtient :

$$\frac{1}{2} m r (\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}^2(t=0)) = -m g (\cos(\theta) - \cos(\theta(t=0))) \tag{1.1}$$

Or on a : $\theta(t=0) \approx 0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$ d'où

$$\frac{1}{2} m r \dot{\theta}^2 = m g (1 - \cos(\theta)) \tag{1.2}$$

En réinjectant ce résultat dans la première équation issue de la RFD on obtient :

$$N_r(\theta) = m g (3 \cos(\theta) - 2)$$

et

$$\theta_f = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 48,2^\circ \quad (\text{indépendant de } m, \text{ de } g \text{ et du rayon de la sphère})$$

D'autre part, on a

$$\dot{\theta}(\theta) = \sqrt{\frac{2g}{r}(1 - \cos(\theta))} \quad \text{d'où} \quad \dot{\theta}_f = \sqrt{\frac{2g}{3r}}$$

On pourrait croire que plus le rayon de la sphère est grand, plus la vitesse à laquelle la bille quitte la sphère est petite, ce qui n'est évidemment pas le cas : plus la sphère est grande plus il faut que la vitesse soit élevée pour qu'un objet puisse la quitter. La résolution du paradoxe réside dans le fait que $\dot{\theta}$ n'est pas la vitesse de la bille.

La vitesse de la bille est $\|\vec{v}_{m/R}\| = r|\dot{\theta}|$ et on a

$$v_f = \sqrt{\frac{2gr}{3}} \quad (\text{augmente avec le rayon de la sphère})$$

Obtention de l'équation (2) par un théorème énergétique

On a :

$$- E_{c/R} = \frac{1}{2}mv_{M/R}^2 = \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2;$$

$$- E_p(M) = mgz + K = mgr(\cos(\theta) - 1) \text{ (avec pour convention : énergie potentielle nulle quand l'objet est au sommet de la sphère).}$$

Il n'y a que le poids qui travaille (en l'absence de frottement, la réaction du support est perpendiculaire à la sphère et donc au déplacement de la bille, son travail est donc nul). On applique le théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{\Delta E_M}{M_0 \rightarrow M} = \frac{\Delta E_C}{M_0 \rightarrow M} + \frac{\Delta E_p}{M_0 \rightarrow M} = 0$$

d'où

$$\frac{1}{2}m \left((r\dot{\theta})^2 - (r\dot{\theta}(t=0))^2 \right) = mgr \left((1 - \cos(\theta)) - (1 - \cos(\theta(t=0))) \right)$$

En simplifiant par r , on retrouve bien l'équation (2).

VIII - Bille sur une tige en rotation

- Soit (R) référentiel terrestre supposé galiléen et (O, x, y, z) repère cartésien avec (Oz) axe vertical ascendant et O situé dans le plan de rotation de la tige ($z = 0$). On choisit une base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ dans (R).

Cinématique :

$$- \vec{OM} = r \vec{e}_r.$$

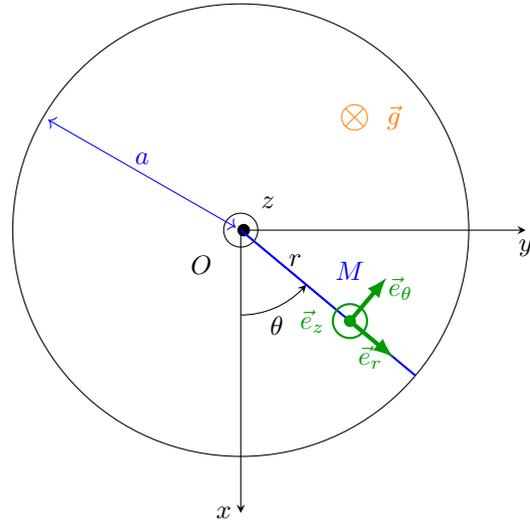
$$- \vec{v}_{M/R} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta = \dot{r} \vec{e}_r + r\Omega \vec{e}_\theta.$$

$$- \vec{a}_{M/R} = (\ddot{r} - r\Omega^2) \vec{e}_r + 2\dot{r}\Omega \vec{e}_\theta.$$

Bilan des forces :

$$- \text{Poids : } \vec{P} = -mg\vec{e}_z.$$

$$- \text{Réaction de la tige, d'axe } (O, \vec{e}_r), \text{ sans frottement solide : } \vec{R} = N_\theta \vec{e}_\theta + N_z \vec{e}_z.$$



On applique la RFD à la bille, dans (R), puis on projette sur les axes. On obtient :

$$\forall t, \begin{cases} \ddot{r} - \Omega^2 r(t) = 0 \\ 2m\dot{r}\Omega = N_\theta \\ 0 = N_z - mg \end{cases}$$

La première équation donne :

$$\forall t, r(t) = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t} \tag{1.3}$$

La bille est lâchée sans vitesse initiale *par rapport à la tige* à la distance $\frac{a}{2}$ de l'axe de rotation. On a donc la bille et la tige animées de la même vitesse, à $t = 0$, à l'endroit où la bille est lâchée :

$$\vec{v}_{M/R}(0) = \dot{r}(0) \vec{e}_r(0) + r(0)\Omega \vec{e}_\theta(0) = \vec{v}_{M' \in tige/R}$$

où $\vec{v}_{M' \in tige/R}$ est la vitesse du point M' appartenant à la tige qui se trouve au même endroit que la bille en $t = 0$. On a donc $\vec{v}_{M' \in tige/R} = \frac{a}{2}\Omega \vec{e}_\theta(0)$ (vitesse d'un point en trajectoire circulaire à la vitesse angulaire Ω à une distance $\frac{a}{2}$ du centre de rotation). D'où :

$$\dot{r}(0) \vec{e}_r(0) + r(0)\Omega \vec{e}_\theta(0) = \frac{a}{2}\Omega \vec{e}_\theta(0)$$

On en déduit, en projetant sur \vec{e}_r et \vec{e}_θ :

$$- \dot{r}(0) = 0;$$

— $r(0)\Omega = \frac{a}{2}\Omega$, d'où : $r(0) = \frac{a}{2}$.

Grâce à ces conditions initiales, on trouve : $A = B = \frac{a}{4}$ et, finalement :

$$\boxed{\forall t \geq 0, r(t) = \frac{a}{4} (e^{\Omega t} + e^{-\Omega t}) = \frac{a}{2} \text{ch}(\Omega t)}$$

Remarque : si, initialement, la bille avait été en $r(t=0) = 0$ (sur l'axe de rotation), alors on aurait trouvé $\forall t \geq 0, r(t) = 0$: le centre de rotation O est une position d'équilibre (instable) de la bille.

La bille arrive au bout de la tige en $t = t_1$ tel que $r(t_1) = a$, d'où $\frac{a}{2}(\Omega t_1) = a$ et :

$$\boxed{t_1 = \frac{1}{\Omega} \text{argch}(2)} \quad (\text{indépendant de la longueur de la tige})$$

2. $\vec{R} = N_\theta \vec{e}_\theta + N_z \vec{e}_z = 2m\dot{r}(t)\Omega \vec{e}_\theta + mg\vec{e}_z$ or $\forall t \geq 0, \dot{r}(t) = \frac{a}{2}\Omega \text{sh}(\Omega t)$, d'où :

$$\boxed{\forall t \geq 0, \vec{R} = ma\Omega^2 \text{sh}(\Omega t)\vec{e}_\theta + mg\vec{e}_z}$$

3. $t_{\text{plastique}} = \frac{1}{\Omega} \text{argsh} \left(\frac{\sqrt{F_{\text{max}}^2 - (mg)^2}}{ma\Omega^2} \right)$

(Si la barre est longue (a élevé) ou si elle tourne vite (Ω élevé), on risque de la déformer avant que la bille n'arrive au bout ($t_{\text{plastique}} < t_1$).

IX - Fusée

1. Considérons le système constitué à l'instant t par la fusée de masse m et de vitesse \vec{v} et à l'instant $t + dt$ par l'ensemble de la fusée de masse $m + dm$ et de vitesse $\vec{v} + d\vec{v}$ et des gaz éjectés pendant dt , de masse $-dm$ et de vitesse $\vec{v} + \vec{u}$. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = \frac{[(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - dm(\vec{v} + \vec{u})] - m\vec{v}}{dt} = \vec{R}$$

En simplifiant et en supprimant le terme quadratique par rapport aux différentielles, qui correspond à un terme négligeable devant les termes linéaires par rapport aux différentielles, on obtient : $\frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt} \vec{u} =$

\vec{R} que l'on peut réécrire : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{R} + \vec{T}$ avec $\vec{T} = \frac{dm}{dt} \vec{u} = -D_m \vec{u}$

A.N. : $T = D_m \cdot u = 60 \times 3 \cdot 10^3 = 18 \cdot 10^4 \text{ N}$.

2. S'il n'y a pas de forces extérieures, l'équation précédente se réécrit $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{u}$ soit $d\vec{v} = \vec{u} \frac{dm}{m}$. On intègre cette équation entre l'instant initial t_i , où la vitesse est \vec{v}_i et la masse m_i et l'instant final t_f , où la vitesse est \vec{v}_f et la masse m_f :

$$\int_{v_i}^{v_f} d\vec{v} = \int_{m_i}^{m_f} \vec{u} \frac{dm}{m}$$

d'où

$$v_f - v_i = \vec{u} [\ln(m)]_{m_i}^{m_f} \quad \text{ou} \quad \boxed{\Delta \vec{v} = \vec{u} \ln \left(\frac{m_f}{m_i} \right)}$$

3. Comme on suppose que le mouvement est verticale, on a $\vec{v} = v\vec{e}_z$ et $\vec{u} = -u\vec{e}_z$. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit alors : $m \frac{dv}{dt} = m\vec{g} - D_m \vec{u}$, ce qui donne, en projetant sur l'axe (Oz) :

$$m \frac{dv}{dt} = -mg + D_m u \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dt} = -g + \frac{D_m}{m} u$$

Sous réserve que le débit des gaz soit constant et suffisant pour que la poussée soit supérieure au poids,

on a : $\frac{dm}{dt} = -D_m$ soit $m(t) = m_0 - D_m t$ et donc $\frac{dv}{dt} = -g + \frac{D_m}{m_0 - D_m t} u$.

On intègre cette relation et en utilisant $v(0) = 0$ et $m(0) = m_0$, on obtient $v(t) = -gt - u[\ln(m_0 - D_m t) - \ln(m_0)]$ soit

$$v(t) = -gt - u \ln \left(1 - \frac{D_m t}{m_0} \right)$$

On sait également $z = \int v dt = \int -gt - u \ln \left(1 - \frac{D_m t}{m_0} \right) dt$. On en déduit $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 - u \int_0^t \ln \left(1 - \frac{D_m t}{m_0} \right) dt$.

Or $\int_0^t \ln \left(1 - \frac{D_m t}{m_0} \right) dt = -\frac{m_0}{D_m} \left[\left(1 - \frac{D_m t}{m_0} \right) \ln \left(1 - \frac{D_m t}{m_0} \right) - \left(1 - \frac{D_m t}{m_0} \right) \right]_0^t = - \left[\left(\frac{m_0}{D_m} - t \right) \ln \left(1 - \frac{D_m t}{m_0} \right) + t \right]$.
Soit au final

$$z(t) = ut - \frac{1}{2}gt^2 + u \left(\frac{m_0}{D_m} - t \right) \ln \left(1 - \frac{D_m t}{m_0} \right)$$

Graphes de la vitesse et de l'altitude de la fusée en fonction du temps en prenant $m_0 = 15 t$

