Correction MI – TD 1

Cinématique du point

I - Détermination d'une trajectoire

1. On écrit $t = \frac{x}{2}$. On en déduit $\boxed{y(x) = x(x-2)}$. Le mouvement est parabolique.
2. Par définition $\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$, soit $\boxed{\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{u_x} + (8t-4)\overrightarrow{u_y}}$.
3. Par définition $\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}$, soit $\boxed{\overrightarrow{a} = 8\overrightarrow{u_y} = \overrightarrow{cste}}$.
4. Le mouvement est accéléré si $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{v} > 0$ et retardé si $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{v} < 0$

II - Caractérisation d'un mouvement

Remarque préliminaire : dans cet exercice, où le mouvement est rectiligne, on note v et a les valeurs algébriques de la vitesse et de l'accélération, c'est-à-dire les composantes des vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$ selon $\overrightarrow{u_x}$. Ce ne sont donc pas, comme définis dans le cours, les normes des vecteurs et on peut avoir $v < 0$ ou $a < 0$. On a donc $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{a} = a\overrightarrow{u_x}$

Les 5 phases du mouvements sont définies par :

i) $0 \leq t \leq 30\,\mathrm{s}$
ii) $30\,\mathrm{s} \leq t \leq 50\,\mathrm{s}$
iii) $50\,\mathrm{s} \leq t \leq 60\,\mathrm{s}$
iv) $60\,\mathrm{s} \leq t \leq 80\,\mathrm{s}$
v) $90\,\mathrm{s} \leq t \leq 100\,\mathrm{s}$

1. La valeur algébrique de l'accélération est donnée par $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a_{moy} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ car a est constante sur chaque phase du mouvement.
2. Comme a est constante, l'expression de $v(t)$ est $v(t) = a\,t + v_0$
3. Le mouvement est rectiligne. Il est accéléré si $a \cdot v > 0$, retardé si $a \cdot v < 0$ et uniforme si $a = 0$

Phase	a (ms^{-2})	v $(\mathrm{ms}^{-1}$, t en s)	Mouvement
i)	1	t	rectiligne (uniformément) accéléré
ii)	0	30	rectiligne uniforme
iii)	-3	$30 - 3t$	rectiligne (uniformément) décéléré
iv)	0	0	Pas de mouvement
v)	-1,5	$-1,5t$	rectiligne (uniformément) accéléré

III - Un porte-avion

Le mouvement est rectiligne, on choisit comme repère d'étude le repère $(Oxyz)$ où l'axe (Ox) est l'axe du mouvement, orienté selon celui-ci et comme point O la position intiale de l'avion. On a alors trivialement $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{v} = v\,\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{a} = a\,\overrightarrow{u_x}$. Tout se passe le long de l'axe (Ox), on pourra à partir de maintenant manipuler exclusivement des équations scalaires. On prend comme origine des temps le début du mouvement, on a alors $x(0) = 0$ et $v(0) = 0$.

On sait $a = \text{cste}$ et $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, on en déduit $v(t) = at + v(0)$ soit $v(t) = at$. Pareillement, on a $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, ce qui donne $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + x(0)$ soit $x(t) = \frac{1}{2}at^2$.

En $t = t_0$, on a $v(t_0) = v_0$ et $x(t_0) = d$, on peut donc écrire $v_0 = at_0$ et $\frac{1}{2}at_0^2 = d$. On remplace at_0 par v_0 dans la deuxième égalité, on obtient $\boxed{t_0 = \dfrac{2d}{v_0}}$ et donc $\boxed{a = \dfrac{v_0}{t_0} = \dfrac{v_0^2}{2d}}$.

Application numérique : $t_0 = \frac{2\times 25}{250/3,6} = 0{,}72\,\mathrm{s}$ et $a = \frac{250/3,6}{0,72} = 96{,}5\,\mathrm{ms}^{-2} \approx 10\,g$

IV - Système bielle-manivelle

1. — Le point A se déplace sur un cercle de centre O et de rayon b le vecteur $\overrightarrow{OA}$ fait un angle $\theta = \omega t$ avec l'axe (Ox), on a donc $\boxed{\overrightarrow{OA}(t) = b\left[\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x} + \sin(\omega t)\overrightarrow{u_y}\right]}$.
   — Si on appelle H la projection du point A sur l'axe (Ox), on a $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OH} = b\cos(\theta)\overrightarrow{u_x}$. On en déduit $\boxed{\overrightarrow{OB}(t) = 2b\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}}$.
   — Le point M est le milieu du segment $[AB]$. On a donc $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$ ce qui donne
   $$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = \frac{3}{2}b\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x} + \frac{1}{2}b\sin(\omega t)\overrightarrow{u_y}}$$
   .
2. Par définition $\overrightarrow{a}_M = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_M}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}$, soit $\boxed{\overrightarrow{a}_M = -\frac{b\omega^2}{2}\left(3\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x} + \sin(\omega t)\overrightarrow{u_y}\right)}$.

V - Big Ben

1. On peut considérer que le mouvement est <u>circulaire uniforme</u>. On se place donc en coordonnées polaires pour la suite de l'exercice.
2. L'aiguille des minutes fait un tour complet (2π radians) en une heure, sa vitesse angulaire est donc $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega_{moy} = \frac{2\pi}{3600\,\mathrm{s}}$ soit $\omega = 1{,}75 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
3. Le mouvement étant circulaire sur un cercle de rayon L, on a $\overrightarrow{v}_M = l\omega\overrightarrow{e_\theta}$ soit $v_M = L\omega = 6{,}98\,\mathrm{mm\,s^{-1}}$.
4. Le mouvement est circulaire uniforme, on a donc $\overrightarrow{a}_M = -L\omega^2\overrightarrow{e_r} = -\frac{v_M^2}{L}\overrightarrow{e_r}$ soit $a_M = L\omega^2 = \frac{v_M^2}{L} = 1{,}22 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{ms^{-2}}$.

VI - Le TGV

On peut se placer dans le repère de Fresnet lié au TGV. On a alors $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_T} + \overrightarrow{a_N}$ où $\overrightarrow{a_T}$ est l'accélération tangentielle et $\overrightarrow{a_N}$ l'accélération normale.
Comme le mouvement est uniforme, $\overrightarrow{a_T} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_T} = \overrightarrow{0}$, il reste $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_N} = \frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_N}$ où R est le rayon de courbure local de la trajectoire. On a donc $a = a_N = \frac{v^2}{R}$.

Si on veut $a < 0{,}05\,g$, cela implique $\frac{v^2}{R} < \frac{g}{20}$ soit $R > \frac{20v^2}{g}$. On a bien un rayon minimal $\boxed{R_{min} = \frac{20v^2}{g}}$.

<u>A.N.</u> : $R_{min} = \frac{20\times(300/3{,}6)^2}{9{,}81} = 14{,}2\,\mathrm{km}$.

VII - Collision ?

1. La voiture A n'a pas encore freiné, elle est donc animé d'un mouvement rectiligne uniforme. La distance parcourue est donc $d_A = v_0\Delta t = 80\,\mathrm{m}$.
   Le véhicule B freine pendant les $2s$, son accélération est constante, opposée à la vitesse. L'expression de la vitesse est donc, en prenant pour le moment l'origine des temps à l'instant où il commence à freiner, $v(t) = v_0 - at$ et la distance parcourue est alors $x_B(t) = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$ soit $d_B = x_B(t = 2\,\mathrm{s}) = 30\,\mathrm{m}$. Sa vitesse, lorsque A commencera à freiner sera alors $40 - 5 \times 2 = 30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
2. L'origine des temps est l'instant où le véhicule A commence à freiner et l'origine de l'axe (Ox), axe du mouvement, est sa position intiale, on a donc :
   — véhicule A : $x_A(t=0) = 0$ et $v_A(t=0) = v_{0A} = 40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
   — véhicule B : $x_B(t=0) = d_0 = d + d_B - d_A = 30\,\mathrm{m}$ et $v_B(t=0) = v_{0B} = 30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
3. Pour les deux véhicules, l'accélération est supposée constante, de sens opposée à la vitesse, on en déduit rapidement
   — $v_A(t) = v_{0A} - at$ et $x_A(t) = -\frac{1}{2}at^2 + v_{0A}t$;

— $v_B(t) = v_{0B} - at$ et $x_B(t) = -\frac{1}{2}at^2 + v_{0B}t + d_0$;

4. Il y a choc si les deux véhicules occupent la même position au même instant, c'est-à-dire s'il existe un instant t_c tel que $x_A(t_c) = x_B(t_c)$, ce qui conduit à $(v_{0A} - v_{0B})t_c = d_0$ soit $\boxed{t_c = \dfrac{d_0}{v_{0A} - v_{0B}}}$.
   Cependant, les équations du mouvement ne sont valables que tant que les véhicules ne sont pas arrêtés. Si on appelle respectivement t_A et t_B les temps d'arrêt des 2 véhicules, il reste à vérifier $t_c < t_A$ et $t_c < t_B$. On voit rapidement que le véhicule B s'arrête avant le A (il a la même accélération de freinage que A mais va initialement moins vite), il suffit alors de vérifier $t_c < t_B$. t_B est donné par $v_B(t_B) = 0$ soit $t_B = \frac{v_{0B}}{a}$.
   A.N. : $t_c = \frac{30}{40-30} = 3\,\mathrm{s}$ et $t_B = \frac{30}{5} = 6\,\mathrm{s}$. On a bien $t_c < t_B$, il y aura bien collision en $t_c = 3\,\mathrm{s}$.

VIII - Une sortie d'autoroute

1. Bretelle de sortie – Pour cette partie, on peut se placer dans le repère de Fresnet.
   (a) $\vec{v} = v\vec{T}$ et $\vec{a} = \vec{a_T} + \vec{a_N} = \dot{v}\vec{e_T} + \frac{v^2}{R}\vec{e_N}$.
   (b) $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire, $\vec{a}$ est orienté vers l'intérieur de la courbure avec $\vec{a}\cdot\vec{v} > 0$ si le mouvement est accéléré, $\vec{a}\cdot\vec{v} < 0$ si le mouvement est retardé et $\vec{a} \perp \vec{v}$ si le mouvement est uniforme.
   (c) La valeur de l'accélération est donnée par $a = ||\vec{a}|| = \sqrt{\dot{v}^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} \geq \frac{v^2}{R}$.
   Donc si $v = v_0$, $a \geq \frac{v_0^2}{R} = \frac{(130/3{,}6)^2}{50} = 26{,}1\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Cette valeur est largement supérieure à $\mu g = 26{,}1\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, ce qui n'assure pas des conditions d'adhérence satisfaisantes (les calculs sur route mouillée donneraient des résultats similaires).
   (d) Si on est à la limite de l'adhérence, donc $v \approx v_0$, le fait de freiner va faire varier la vitesse et donc faire apparaitre un terme $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} < 0$ dans l'expression de a. a va donc temporairement augmenter et risque alors de dépasser la limite μg, ce qui entrainera une perte d'adhérence.
   (e) Si on ne freine pas dans le virage, on a $a = \frac{v^2}{R}$. La condition $a < \mu g$ amène à $v < v_b$ avec $\boxed{v_b = \sqrt{\mu g R}}$.
   A.N. : route sèche : $v_{bs} = sqrt 1 \times 10 \times 50 = 22{,}4\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 80{,}5\,\mathrm{km\,h^{-1}}$; route mouillée : $v_{bm} = sqrt 0{,}3 \times 10 \times 50 = 12{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 44{,}1\,\mathrm{km\,h^{-1}}$
2. Voie de décélération – Dans cette partie, le mouvement est rectiligne retardé, on choisit un repère cartésient où (Ox) est l'axe du mouvement et O la position initiale de la voiture.
   (a) On suppose qu'on freine avec une accélération constante $a < \mu g$, on a donc $\vec{a} = -a\vec{u_x}$. On en déduit $v(t) = K - at$. Comme $v(t=0) = v_0$ on a $K = v_0$ et donc $\boxed{v(t) = v_0 - at}$.
   (b) On intègre une nouvelle fois pour obtenir la position : $x(t) = -\frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ (car $x(0) = 0$). On sait que, au bout de la voie décélération donc pour $x = l$, il faut $v \leq v_b$. On va alors chercher une relation entre v et x. Pour cela on peut écrire $at = v_0 - v$ et donc $ax = -\frac{(v_0-v)^2}{2} + v_0(v_0 - v) = \frac{v_0^2 - v^2}{2}$. Donc pour $x = l$, $l = \frac{v_0^2 - v^2}{2a}$. Comme $a < \mu g$ et $v < v_b$, il faut $l > l_{min}$ avec $\boxed{l_{min} = \dfrac{v_0^2 - v_b^2}{2\mu g}}$.
   A.N. : route sèche : $l_{min,s} = \frac{(130/3{,}6)^2 - 22{,}4^2}{2\times 10} = 40{,}1\,\mathrm{m}$; route mouillée : $l_{min,m} = \frac{(110/3{,}6)^2 - 12{,}2^2}{2{,}3\times 10} = 131\,\mathrm{m}$

IX - Mouvement décéléré

1. Par définition $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ soit, en projetant sur l'axe (Ox) et en notant $v = v_x$ (vrai tant que $v_x \geq 0$) $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv^2}$.
2. L'équation précédente[1] peut se réécrire $-\frac{1}{v^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = k$ soit $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{v}\right) = k$. Ce qui donne $\frac{1}{v} = kt + A$. Or en $t = 0$, $v(0) = v_0$, on en déduit $A = \frac{1}{v_0}$ soit $\boxed{v(t) = \dfrac{v_0}{1 + kv_0 t}}$.
   On sait également $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v$, on peut alors intégrer pour aboutir à $x(t) = \frac{1}{k}\ln(1 + kv_0 t) + B$. La condition intiale $x(0) = 0$ donne $B = 0$ et donc $\boxed{x(t) = \dfrac{1}{k}\ln(1 + kv_0 t)}$.

1. On reconnait une équation similaire à l'équation régissant une loi de cinétique chimique d'ordre 2.

3. L'équation précédente donne $1+kv_0t = e^{kx}$. En reportant dans l'expression de $v(t)$, on trouve l'expression demandée : $\boxed{v(x) = v_0\, e^{-kx}}$.