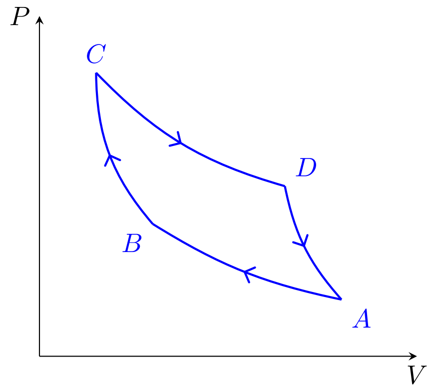
Correction CTE – TD 4

Machines thermiques

I - Étude du cycle de Carnot moteur

1. Un cycle de Carnot est constitué de deux adiabatiques réversibles (donc isentropiques) et de deux isothermes réversibles. A est le point de pression la plus basse et le cycle $ABCDA$ est décrit dans le sens horaire (cycle moteur). Compte tenu du fait que, pour un GP, l'isentropique est toujours plus inclinée que l'isotherme, l'évolution est forcément celle-ci : AB isotherme réversible, BC adiabatique réversible, CD isotherme réversible et DA adiabatique réversible. En effet, si AB était une adiabatique réversible, le tracé du cycle ne permettrait plus de respecter l'énoncé « A est le point de pression la plus basse ».



Loi de Reech :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \gamma \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$$

Pour un GP, la pente d'une isentropique est γ fois la pente d'une isotherme.

2. $\boxed{T_B = T_A} = 290\,\mathrm{K}$ car AB est isotherme et $W_{AB} = -nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = +nRT_A \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)$. On en déduit :

$$\boxed{P_B = P_A e^{\frac{W_{AB}}{nRT_A}} = P_A e^{\frac{W_{ABm}}{RT_A}}}$$

A.N. : $P_B = 4{,}00\,\mathrm{bar}$.

3. $Q_{BC} = 0$ car BC est adiabatique donc $W_{BC} = \Delta U_{BC} = C_V(T_C - T_B)$. On en déduit :

$$\boxed{T_C = \frac{W_{BC}}{C_V} + T_B = \frac{W_{BCm}}{R}(\gamma - 1) + T_B} \text{ car } C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$$

De plus, BC est adiabatique *et* réversible *et* le gaz est supposé parfait, on peut donc appliquer les relations de Laplace : $P_C^{1-\gamma} T_C^{\gamma} = P_B^{1-\gamma} T_B^{\gamma}$. On en déduit :

$$\boxed{P_C = P_B \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}}$$

A.N. : $P_C = 164\,\mathrm{bar}$; $T_C = 1{,}00 \cdot 10^3\,\mathrm{K}$.

4. $\boxed{T_D = T_C}$ car CD est isotherme. Et $\boxed{P_D = P_A \left(\frac{T_A}{T_D}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}} = 41\,\mathrm{bar}$ car DA est adiabatique *et* réversible donc isentropique *et* que le gaz est supposé parfait.

5. $\eta = -\frac{W_{cycle}}{Q_{chaude}} = 1 + \frac{Q_{froide}}{Q_{chaude}}$ les sources chaude et froide étant respectivement situées le long des isothermes T_C et T_A. Donc $\eta = 1 + \frac{Q_{AB}}{Q_{CD}}$. Or, l'évolution étant cyclique, on a $\Delta S_{cycle} = 0$ et, le cycle de Carnot étant entièrement réversible, on a $\Delta S_{cycle} = S^e_{cycle} = \frac{Q_{AB}}{T_A} + \frac{Q_{CD}}{T_C}$. Finalement :

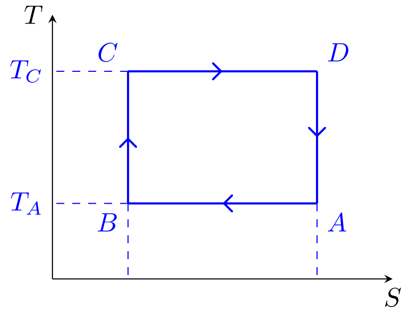
$$\boxed{\eta = 1 + \frac{Q_{AB}}{Q_{CD}} = 1 - \frac{T_A}{T_C}} = 0,71$$

Cela signifie que la dépense thermique est convertie à 71 % en travail mécanique.
Le cycle de Carnot étant entièrement réversible, il a toujours l'efficacité maximale pour des sources de chaleur données et son rendement absolu vaut toujours 1.

6. Dans un diagramme $T(S)$ les isothermes sont parallèles à l'axe des abscisses et les isentropiques parallèles à l'axe des ordonnées. D'autre part, le gaz étant parfait, on a, sur CD :

$$\Delta S_{CD} = C_V \ln\left(\frac{T_D}{T_C}\right) + nR\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = nR\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) > 0$$

donc $S_D > S_C$. Ces résultats sont suffisants pour obtenir le cycle suivant :



Si on écrit le deuxième principe pour une évolution infinitésimale : $\mathrm{d}S = \delta S^e + \delta S^c$. Le cycle est réversible donc $\delta S^c = 0$ et $\mathrm{d}S = \delta S^e = \frac{\delta Q}{T_{ext}}$ avec $T_{ext} = T$ tout le long des échanges thermiques puisque le cycle est réversible. On en déduit :

$$\boxed{\mathcal{A}_{cycle} = \int_{cycle} T\mathrm{d}S = \int_{cycle} \delta Q = Q_{cycle}}$$

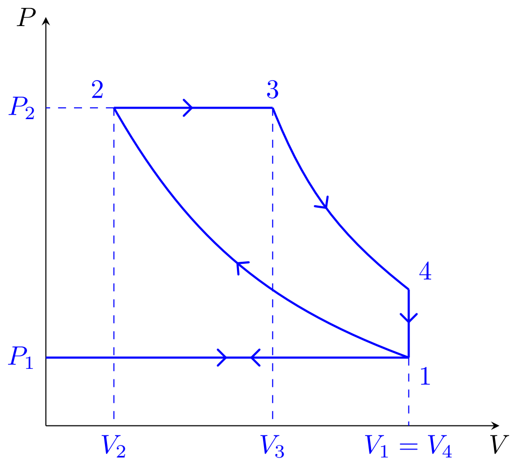
Dans un diagramme $T(S)$ l'aire d'un cycle réversible est égale au transfert thermique du cycle. On remarque que, pour un moteur, ce cycle $T(S)$ est également décrit dans le sens horaire.

II - Cycle Diesel

II.2 - Étude

On assimile le système contenu dans le cylindre à un unique gaz parfait.

1. Allures : attention, les isentropiques du GP ne sont pas des segments dans le plan (p, V).



$[1 \to 2]$ et $[3 \to 4]$: isentropiques du GP donc

$$PV^\gamma = \text{cste} \quad \text{soit} \quad P = \frac{\text{cste}}{V^\gamma}$$

cycle parcouru en sens horaire $\Rightarrow$ cycle moteur.

2. On suit, arête par arête, le cycle :

   1-2 Évolution adiabatique et réversible donc isentropique. Isentropique d'un GP donc utilisation des relations de Laplace : $P_2V_2^\gamma = P_1V_1^\gamma$ donc $\boxed{P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma = P_1\alpha^\gamma}$.

   2-3 Évolution isobare donc $P_3 = P_2$: $\boxed{P_3 = P_1\alpha^\gamma}$.

   3-4 Évolution adiabatique et réversible donc isentropique. Isentropique d'un GP donc utilisation des relations de Laplace : $P_4V_4^\gamma = P_3V_3^\gamma$ or $V_4 = V_1$ car [4-1] est isochore donc $\boxed{P_4 = P_3\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^\gamma = P_1\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\gamma}$.

3. 1-2 Évolution adiabatique et réversible donc isentropique. Isentropique d'un GP donc utilisation des relations de Laplace : $T_2V_2^{\gamma-1} = T_1V_1^{\gamma-1}$ donc $\boxed{T_2 = T_1\alpha^{\gamma-1}}$.

   2-3 Évolution isobare donc $P_3 = P_2$ donc pour un GP fermé $\frac{T_3}{V_3} = \frac{P_3}{nR} = \frac{P_2}{nR} = \frac{T_2}{V_2}$ et $T_3 = \frac{V_3}{V_2}T_2 = \frac{V_3}{V_1}\frac{V_1}{V_3}T_2 = \frac{\alpha}{\beta}T_2$. Finalement : $\boxed{T_3 = \dfrac{\alpha^\gamma}{\beta}T_1}$.

   3-4 Évolution adiabatique et réversible donc isentropique. Isentropique d'un GP donc utilisation des relations de Laplace : $T_4V_4^{\gamma-1} = T_3V_3^{\gamma-1}$ or $V_4 = V_1$ car [4-1] est isochore et $T_3 = \frac{\alpha^\gamma}{\beta}T_1$ donc $\boxed{T_4 = T_3\left(\dfrac{V_3}{V_1}\right)^\gamma = T_1\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\gamma}$.

4. Par définition d'un moteur cyclique ditherme : $\eta = -\frac{W}{Q_C}$ où W est le travail sur le cycle et Q_C est le transfert thermique réalisé avec la source chaude.
   On applique le premier principe : $\Delta U = W+Q_C+Q_F$ où Q_F est le transfert thermique réalisé avec la source froide. U est une fonction d'état donc sa variation sur un cycle est nulle. On en déduit $-W = Q_C + Q_F$. Donc $\eta = 1 + \frac{Q_F}{Q_C}$.
   Le transfert thermique Q_C est réalisé sur l'arête [2-3] : $Q_C = Q_{23}$. Sur cette arête l'évolution est isobare entre deux états d'équilibre mécanique et aucune force autre que celles de pression ne s'applique au système, on peut donc utiliser la relation $Q_{23} = \Delta H_{23}$.
   Pour un GP, on sait que $\Delta H = C_P\Delta T$ donc ici $\Delta H_{23} = C_P(T_3 - T_2)$.
   Le transfert thermique Q_F est réalisé sur l'arête [4-1] : $Q_F = Q_{41}$. Sur cette arête l'évolution est isochore, on peut donc utiliser la relation $Q_{41} = \Delta U_{41}$.
   Pour un GP, on sait que $\Delta U = C_V\Delta T$ donc ici $\Delta U_{41} = C_V(T_1 - T_4)$.
   Finalement : $\eta = 1 + \frac{C_V}{C_P}\frac{T_1-T_4}{T_3-T_2}$; en utilisant la relation $\frac{C_V}{C_P} = \frac{1}{\gamma}$ et donc $\boxed{\eta = 1 - \dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}\right)}$.

5. On fait apparaître des rapports de températures pour utiliser les relations trouvées aux questions 1. et 2. : $\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{\frac{T_4}{T_3}-\frac{T_1}{T_3}}{1-\frac{T_2}{T_3}}$. Finalement : $\boxed{\eta = 1 - \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\beta^{-\gamma} - \alpha^{-\gamma}}{\beta^{-1} - \alpha^{-1}}}$.

6. Application numérique : $P_2 = P_3 = 40{,}2\,\text{bar}$; $P_4 = 1{,}86\,\text{bar}$; $T_2 = 833\,\text{K}$; $T_3 = 1296\,\text{K}$; $T_4 = 538\,\text{K}$.

7. $\eta = 0,617$. Le moteur restitue sous forme de travail mécanique 61,7 % de l'énergie qu'il a consommée.

8. $T_C = T_3 = 1296\,\text{K}$ et $T_F = T_1 = 290\,\text{K}$. On a, pour un moteur cyclique ditherme : $\boxed{\eta_{Carnot} = 1 - \dfrac{T_F}{T_C}}$ donc $\eta_{Carnot} = 0,776$. On en déduit le rendement absolu $\boxed{r = \dfrac{\eta}{\eta_{Carnot}}} = 0,795$. Un moteur de Carnot (donc entièrement réversible) qui fonctionnerait entre les deux mêmes sources de chaleur que le moteur étudié restituerait sous forme de travail mécanique 77,6 % de l'énergie qu'il a consommée.
   Le moteur étudié a une efficacité égale à 79,5 % de l'efficacité maximale (de Carnot). Les 21,5 % d'écart avec le cycle de Carnot sont dus aux irréversibilités du cycle.

9. Le long de l'arête [2-3], l'évolution est isobare entre deux états d'équilibre mécanique et aucune autre force que celles de pression ne s'applique donc $Q_{m,23} = \Delta H_{m,23}$ or, pour un GP, $\Delta H_m = C_{Pm}\Delta T$ donc $Q_{m,23} = C_{Pm}(T_3 - T_2)$. On a donc $S^e_{m,23} = \frac{Q_{m,23}}{T_3} = \frac{C_{Pm}(T_3-T_2)}{T_3}$. En utilisant la relation de Mayer du GP : $C_{Pm} = \frac{\gamma R}{\gamma-1}$, on conclut : $\boxed{S^e_{m,23} = \dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}\dfrac{T_3 - T_2}{T_3}}$
   D'autre part, le système est un GP donc $\Delta S_{23} = C_P\ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) - nR\ln\left(\frac{P_3}{P_2}\right)$ ou encore $\Delta S_{m,23} = C_{Pm}\ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) - R\ln\left(\frac{P_3}{P_2}\right)$. Or $P_3 = P_2$ donc $\boxed{\Delta S_{m,23} = \dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}\ln\left(\dfrac{T_3}{T_2}\right)}$.
   Enfin $\boxed{S^c_{m,23} = \Delta S_{m,23} - S^e_{m,23} = \dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}\left(\ln\left(\dfrac{T_3}{T_2}\right) - \dfrac{T_3 - T_2}{T_3}\right)}$.

10. Le long de l'arête [4-1], l'évolution est isochore donc $Q_{m,41} = \Delta U_{m,41}$ or, pour un GP, $\Delta U_m = C_{Vm}\Delta T$ donc $Q_{m,41} = C_{Vm}(T_1 - T_4)$. On a donc $S^e_{m,41} = \frac{Q_{m,41}}{T_1} = \frac{C_{Vm}(T_1-T_4)}{T_1}$. En utilisant la relation de Mayer du GP : $C_{Vm} = \frac{R}{\gamma-1}$, on conclut : $\boxed{S^e_{m,41} = \dfrac{R}{\gamma - 1}\dfrac{T_1 - T_4}{T_1}}$

D'autre part, le système est un GP donc $\Delta S_{41} = C_V \ln\left(\frac{T_1}{T_4}\right) + nR\ln\left(\frac{V_1}{V_4}\right)$ ou encore $\Delta S_{m,41} = C_{Vm}\ln\left(\frac{T_1}{T_4}\right) + R\ln\left(\frac{V_1}{V_4}\right)$. Or $V_4 = V_1$ donc $\boxed{\Delta S_{m,41} = \frac{R}{\gamma - 1}\ln\left(\frac{T_1}{T_4}\right)}$.

Enfin $\boxed{S^c_{m,41} = \Delta S_{m,41} - S^e_{m,41} = \frac{R}{\gamma - 1}\left(\ln\left(\frac{T_1}{T_4}\right) - \frac{(T_1 - T_4)}{T_1}\right)}$.

11. $S^c_{m,cycle} = S^c_{m,12} + S^c_{m,23} + S^c_{m,34} + S^c_{m,41}$. Or sur les arêtes [1-2] et [3-4], les évolutions sont réversibles donc $S^c_{m,12} = 0$ et $S^c_{m,34} = 0$. Finalement,

$$\boxed{S^c_{m,cycle} = S^c_{m,23} + S^c_{m,41} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}\left(\ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) - \frac{T_3 - T_2}{T_3}\right) + \frac{R}{\gamma - 1}\left(\ln\left(\frac{T_1}{T_4}\right) - \frac{T_1 - T_4}{T_1}\right)} = 7{,}4\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$$

III - Pompe à chaleur géothermique

On prend bien soin de distinguer les différents fluides qui sont au nombre de trois :

— l'eau qui circule dans les capteurs extérieurs ;
— le fluide caloporteur qui circule dans la pompe à chaleur ;
— l'eau qui circule dans les émetteurs intérieurs.

1. Éléments aux niveaux desquels se situent les transferts d'énergie thermique :
   (a) de la source froide vers le fluide caloporteur : <u>évaporateur</u>.
   (b) du fluide caloporteur vers la source chaude : <u>condenseur</u>.
2. L'eau est une phase condensée incompressible et indilatable donc $\Delta H = C_{eau}\Delta T = m_{eau}c_{eau}\Delta T$. Il n'y a pas de travail autres que ceux de force de pression donc $Q_{eau} = \Delta H$. On en déduit $Q_{eau} = m_{eau}c_{eau}\Delta T$. Au niveau de l'évaporateur, l'eau captée passe de $T_i = 15\,°\mathrm{C}$ à $T_f = 9\,°\mathrm{C}$ et on a donc $Q_{eau} = m_{eau}c_{eau}(T_f - T_i)$. Le débit volumique en eau est $D_v = 42\,\mathrm{m^3\,h^{-1}}$. Pendant la durée Δt, le volume d'eau qui circule est donc $V_{\Delta t} = D_v\Delta t$ et la masse d'eau qui circule est $m_{eau,\Delta t} = \rho_{eau}D_v\Delta t$. Donc pendant une durée Δt, on a $Q_{eau} = \rho_{eau}D_v\Delta t\, c_{eau}(T_f - T_i)$. Ce transfert thermique est réalisé entre la source froide et le fluide caloporteur : le fluide caloporteur reçoit donc l'énergie qui est cédée par l'eau captée. On a donc, du point de vue du fluide caloporteur de la pompe à chaleur, pendant une durée Δt : $Q_{fr} = -Q_{eau} = \rho_{eau}D_v\Delta t\, c_{eau}(T_i - T_f)$, ce qui permet de définir une puissance thermique $\boxed{\mathcal{P}_{th,fr} = \frac{Q_{fr}}{\Delta t} = \rho_{eau}D_v c_{eau}(T_i - T_f)}$.
   <u>A.N.</u> : $\mathcal{P}_{th,fr} = 1\cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \times 42\,\mathrm{m^3\,h^{-1}} \times 4{,}18\,\mathrm{kJ\,K^{-1}\,kg^{-1}} \times (15\,°\mathrm{C} - 9\,°\mathrm{C})$
   $\mathcal{P}_{th,fr} = 1\cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \times 0{,}0117\,\mathrm{m^3\,s^{-1}} \times 4{,}18\cdot 10^3\,\mathrm{J\,K^{-1}\,kg^{-1}} \times (6\,\mathrm{K} = 293\cdot 10^3\,\mathrm{J\,s^{-1}} = 293\,\mathrm{kW}$
3. La puissance thermique échangée par le fluide caloporteur avec la source chaude notée $P_{th,ch}$ est négative car le fluide caloporteur cède de l'énergie au circuit d'eau des émetteurs intérieurs à la maison pour la chauffer. Elle est égale en valeur absolue à la « puissance thermique émise par la pompe à chaleur » évoquée dans le document mais de signe opposé. On a donc $P_{th,ch} = -390\,\mathrm{kW}$.
4. On applique le premier principe de la thermodynamique au fluide caloporteur, qui est un système fermé : $\Delta U = Q_{ch} + Q_{fr}$. L'évolution du fluide est cyclique et sur un cycle on a : $\Delta U = 0$. On en déduit pour un cycle : $\boxed{W_{elec} + Q_{ch} + Q_{fr} = 0}$.
5. On en déduit la relation entre les puissances : $\boxed{P_{elec} + P_{th,fr} + P_{th,ch} = 0}$.
6. $\boxed{P_{elec} = -P_{th,fr} - P_{th,ch}} = -293\,\mathrm{kW} - (-390\,\mathrm{kW}) = 97\,\mathrm{kW}$.
7. Le coefficient de performance (COP) de la pompe à chaleur est $\boxed{\mathrm{COP} = -\frac{P_{th,ch}}{P_{elec}}} = -\frac{-390\,\mathrm{kW}}{97\,\mathrm{kW}} = 4$. La pompe à chaleur transfert thermiquement à la maison une énergie quatre fois supérieure à celle consommée électriquement. (Dans l'hypothèse simpliste où l'énergie électrique consommée est entièrement transférée sous forme mécanique au fluide caloporteur. L'efficacité réelle est sans doute légèrement inférieure.)
8. La puissance thermique émise par effet Joule par un chauffage à résistance électrique alimenté par la même puissance électrique aurait été $P_{th,ch} = -P_{elec} = -97\,\mathrm{kW}$ soit quatre fois moins qu'avec la pompe à chaleur.